Math. a. 150^{x}

<36634186400018

<36634186400018

Bayer. Staatsbibliothek

R

m

Neuere Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften

besonders zur

Vervollkommnung der Maschinenlehre

mit Anwendungen auf Getraidemühlen, Sägemühlen, Stampfmühlen, Hammerwerke, Röhrenleitungen, Kanäle ꝛc.

von

K. Ch. Langsdorf,

Dr. der Philosophie; Großherzogl. Bad. Geh. Hofrath und ordentl. Lehrer der Mathematik zu Heidelberg; Russisch-Kaiserl. Prof. Honor. der Universität Wilna und der gel. Societäten zu Göttingen, zu Erfurt, zu Lausanne, zu Harlem; der Kaiserl. Leopold. Akademie der Naturforscher, der Akademie zu München u. a. Mitgliede.

Mit 1 Tafel in Stein.

Mannheim und Heidelberg,
in der Schwan und Götzischen Buchhandlung.
1816.

R

Bayerische Staatsbibliothek München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Noch verdanke ich der Vorsehung hinlängliche Kräfte zur Erfüllung der Pflichten, die sie mir durch die Bestimmung zu meinem jetzigen Lehramte auferlegte. — Und wahrlich diese Worte sind nicht mit Kälte hingeworfen; ich erkenne diese Güte mit dem herzlichsten und lautesten Danke. Ich suchte, die mir verliehenen Jahre zu benutzen. Horazens Lehren waren bei mir nicht vergeblich:

> Eheu fugaces — — — labuntur anni! Od. II. 14.
>
> Quid sit funturam cras, fuge quaerere, et quem sors dierum cunque dabit, lucro appone. Od. I. 9.
>
> Spatio brevi spem longam reseces. Dum loquimur fugerit invida aetas. Carpe diem, quam minime credule postero. Od. I. 11.
>
> Dona praesentis cape laetus horae. Od. III. 8.

Das waren mir goldne Sprüche, die mich den Werth der Zeit schätzen, jede verliehene Stunde als ein Geschenk zu betrachten lehrten, worauf ich keinen Anspruch zu machen hatte. Ich geizte mit Stunden, um Täge zu gewinnen, und was ich so gewann, benutzte ich größtentheils zur Erweiterung und Vervollkommnung des Unterriches, wozu mich das Loos zuerst auf dem Lande, dann auf den Universitäten zu Erlangen, zu Wilna und zuletzt in Heidelberg bestimmt hatte. Was ich im Druck bekannt machte waren fast immer Resultate der Bemühungen, die ich auf Verbesserungen der schriftlichen Aufsätze verwendet hatte, deren ich mich zu meinen Vorlesungen oder auch zum Privatunterricht bediente. Ohne neue Bemerkungen, Einschaltungen, Verbesserungen begann ich nie ein neues Semester. Aber leider muß ich es öffentlich gestehen, daß ich für soviele Anstrengungen in Teutschland höchstselten durch gleichen Eifer auch nur einzelner Zuhörer belohnt worden bin. Schon in Erlangen mußte ich die unangenehme Erfahrung machen, daß öffentlicher mathematischer Unterricht desto sicherer auf Beifall rechnen kann, je oberflächlicher er ist.

Umsomehr wurde ich in Wilna von dem Eifer überrascht, mit dem dort meine Vorlesungen besucht und das mathematische Studium betrieben wurde. Mein Hörsaal glich in dieser Hinsicht dem eines Platos und Euklids, und ich hätte ihn wie Ersterer überschreiben dürfen, weil dort kein Akademiker dem mathematischen Unterricht eines akademischen Lehrers beiwohnen darf, der nicht vorher unter der Leitung eines hierzu besonders bestimmten Lehrers die Elementarmathematik mit allem Eifer studirt hätte. Lehren der höheren Mathematik, Differential- und Integralrechnung und höhere Mechanik waren für Sie eigentliche Lockspeise; ich bemerkte Lässigkeit und eine Art von Unzufriedenheit, wie über Mangel an Nahrung, wenn einige Stunden ohne Gebrauch der höheren Mathematik und ohne Einmischung besonderer Schwierigkeiten vorüber giengen. Wetteifernd traten sie vor die Tafel, um schwierige Demonstrationen und Auflösungen zu wiederholen und selbst durch Beispiele zu erläutern, so daß ich die Reihe halten mußte, um Alle zu befriedigen. Späterhin fand ich es in Heidelberg wieder wie vorher in Erlangen. Machte ein Einzelner eine Ausnahme, so war er der Regel nach gewöhnlich ein Russe oder auch ein Schweizer. In der That ist es mit der Vernachläsßigung mathematischer Kenntnisse in Teutschland so weit gekommen, daß sie beinahe an Verachtung gränzt, und daß nicht etwa nur Juristen sich das Recht erworben haben, Ignoranten in diesem Fache zu seyn, sondern selbst Kameralisten. Die gänzliche Planlosigkeit, mit welcher in jetzigen Zeiten das kameralische Studium auf Universitäten betrieben wird, übersteigt allen Glauben. Selten haben Studirende in diesem Fache einen bestimmten Zweck vor Augen, sie würden sonst unter andern auch einsehen, daß die Ingenieurwissenschaften einen sehr wichtigen Theil der Kameralwissenschaften ausmachen, daß die wichtigsten Theile der Technologie mit zu den Ingenieurwissenschaften gehören, und daß der Kameralist als solcher keinen Schritt thun kann, ohne zu kalkuliren. Wenn der Jurist geradezu behauptet, daß ein Jurist auch zu jedem Kameralamte gebraucht werden könne, und solchem vielleicht noch besser vorstehen werde, als ein sogenannter Kameralist, der nicht nebenbei auch Jurisprudenz studirt habe, so wird sich, wie das Kameralstudium jetzt betrieben wird (die Mängel des Unterrichts mit in Anschlag gebracht) wenig dagegen sagen lassen; und ich kann daher Landesverordnungen, welche nur in Bezug auf Jurisprudenz die Zahl der Studirenden beschränken, es aber dabei mit dem kameralistischen Studium nicht so genau

nehmen, nicht billigen, wenn nicht etwa der besondere Grund unterliegt, daß Kameralisten überhaupt als Unstudirte angesehen und als blose Schreiber behandelt werden sollen, wie sie es verdienen. Am wenigsten kann ich den Grund gelten lassen, daß geringes Talent eher noch mit dem Studium des Kameralfachs als mit dem der Jurisprudenz vereinbar sey. Ich halte mich vielmehr gerade vom Gegentheil überzeugt und wage darum hierüber ein Urtheil, weil ich vormals meine akademische Laufbahn in Göttingen und nachher noch in Gießen mit größtem Eifer dem Studium der Jurisprudenz gewidmet habe. Ich halte mich überzeugt, daß man, gleiche Talente und gleichen Zeitaufwand vorausgesetzt, eher 5 brauchbare Juristen als einen brauchbaren Kameralist auf Universitäten bilden wird. Einen sehr wichtigen Theil des Kameralfachs macht die Technologie aus, für die man, nach meiner Einsicht, zu wenig Aufmerksamkeit hat, zu wenig von Seiten der Regierungen. Strassenbau, Brückenbau, Maschinen- insbesonders Mühlenbau, ingleichem die auf gemeine Wohn- und landwirthschaftliche Gebäude beschränkte bürgerliche Baukunst, der Bergbau, Torfgräbereien, Köhlereien, Kalkbrennereien, Ziegelbrennereien, Salinenbau, Salpeter- und Essigsiedereien, Bierbrauereien, Branntweinbrennereien u. d. gl. sind höchstwichtige Gegenstände, die in jedem Staate beinahe alle vorkommen und gewiß der Aufmerksamkeit der Regierung würdig sind. Man wird aber fordern müssen, daß der Lehrer von dem Gegenstande, worüber er Unterricht ertheilt, selbst hinlängliche Kenntnisse besitze. Die Kathunfabriken, Strumpfwirkereien, holländische Pfeifenfabriken, die Wachsfabriken, die Zuckersiedereien ꝛc. können am füglichsten dergleichen Fabrikanten überlassen bleiben, oder dem späteren Lesen solcher Schriften, die ausführlich davon handlen. Der akademische Unterricht bedarf weislich vorgeschriebener Grenzen; blos oberflächliche Erzählungen rauben die kostbare Zeit zu nützlicheren Vorträgen; sie dienen dem Lehrer zur Verbergung eigener Unwissenheit und schaden mehr als sie nützen. Die Lehrstelle der Landwirthschaft ist größtentheils ohne allen Nutzen. Landwirthe werden nie in der Nähe des Katheders gebildet, gesetzt auch, daß der Lehrer in dieser Wissenschaft zu Hause wäre, wovon wir doch nur wenige Beispiele haben. Ueberdas bezielen die öffentlichen Lehranstalten unserer Universitäten nicht den künftigen Wohlstand des Zuhörers, sondern das Wohl des Staats durch die dem Zuhörer mitzutheilenden Kenntnisse. In dieser Hinsicht wird man nun wohl die Bearbeitung des Bodens,

das Düngen, das Säen, das Bepflanzen der Aecker mit Getraide, mit Kartoffeln, mit Taback ꝛc. die Art und Zeit des Aerndtens u. d. gl. ohne Bedenken dem praktischen Landwirthe überlassen dürfen, oder mit solchem darüber Rücksprache nehmen. Wenigstens halte ich ihn für die kompetenteste Stelle zur Appellation vom Katheder. Dennoch mögte ich dieses Lehrfach nicht ganz aufgehoben wünschen. Es könnte durch Beschränkung zu gewissen Zwecken sehr nützlich gemacht werden, wenn ein einsichtsvoller und eifriger Lehrer ein diesen Zwecken entsprechendes Lehrbuch ausarbeitete, dem er in seinen Vorlesungen folgte. Die Forstkunde ist ein höchstwichtiger Theil der Kameralistik. Auf einer Universität, welche ansehnliche Waldungen verschiedener Art in der Nähe hat, kann sie nicht nur mit Nutzen vorgetragen werden, sondern es ist dieses vielmehr die ganz vorzüglich dazu geeignete Stelle, die auch der, einzelnen Instituten nie ganz entgehende, Vorwurf der Gewinnsucht nicht leicht treffen kann. Holz, Licht, Wohnung, Wäsche und Tisch, welche für solche Instituten schon einen bedeutenden Beitrag zur Möglichkeit des Bestandes ausmachen, werden unter viele Bürger einer Universitätsstadt vertheilt. Zum Vortrage der Hülfswissenschaften sind auf der Universität ohnehin schon mannigfaltige Lehrer angestellt, wovon jeder nur ein geringes Honorar beziebt. Diese Hülfswissenschaften (z. B. Botanik, Physik, reine und angew. Mathematik, Chemie ꝛc.) können bei einem Privat- oder auch fürstlichen Institute nie so vollständig mitgetheilt werden, wie auf einer Universität. Daneben findet aber hier der junge Forstmann noch mannigfaltige Gelegenheit zu Bildungen, die ihm gleichfalls nützlich sind z. B. im Reiten, Sprachen, Geschichte, Baukunst, Statistik, Philosophie, Mineralogie, Archäologie, Technologie ꝛc. wovon er, soviel ihm die Zeit gestattet, nach Neigung wählen kann; des Vortheils nicht zugedenken, mit Menschen von so mannigfaltigen Nationen eine Zeit lang vereint zu leben, und Bekanntschaften zu machen, die oft auf sein ganzes Leben Bezug haben. Hoffentlich wird man mir bei dem schon seit Jahren genährten Wunsche, daß es auf Universitäten besser seyn mögte, diese hier wohl nicht gesuchte Ausschweifung vergeben. Ich habe mich hierüber öfters gegen Freunde geäußert, welche mir den Wunsch zu erkennen gaben, daß ich meine Gedanken irgendwo öffentlich aussprechen mögte. Wenn ich nun gleich mich in diesem Augenblick gesund und für meine Jahre noch kräftig genug fühle, so erinnern mich doch diese sehr lebhaft an die eigentliche Stelle meiner

Laufbahn, an den Abend meines Lebens — quem sors dierum cunque dabit, lucro appone — ruft mir Horaz zu. Ich mache daher auch nie auf das Ende einer Woche Rechnung, deren ersten Tag mir die Vorsehung noch geschenkt hat. Aus diesem Grunde habe ich hier über Einiges meine Meinung ausgesprochen, die ich sonst noch mit mir getragen haben würde. Freunde, die nicht meiner Meinung sind, werden mir vergeben; und Feinde bin ich mir nicht bewußt.

Ebendiese Hinsicht hat auch die Herausgabe dieser Blätter beschleunigt, die ich sonst noch aufgeschoben haben würde. Doch bin ich auch Freunden nähere Rechenschaft über den Zweck dieser Herausgabe schuldig. Ich arbeite bereits zwischen 30 und 40 Jahren (Meine kleine Schrift über die Bewegungskräfte auf Salzwerken wird vor ohngefähr 38 Jahren erschienen seyn) für die Mechanik. Dieses wird nicht leicht der Fall bei einem jetzt lebenden Schriftsteller seyn; noch weniger wird bei irgend einem akademischen Lehrer hiermit zugleich der glückliche Umstand verbunden seyn, 16 Jahre lang sich mit der Ausübung selbst praktisch beschäftigt, soviele in Ausübung gekommene Gutachten ertheilt, und soviele theils in theils außer Teutschland angelegte Maschinen (worunter die von dem Ritter v. Reichenbach vorzüglich genennt zu werden verdienen) beaugenscheinigt zu haben, als mir durch ganz besonderes Zusammentreffen günstiger Umstände zu Theil wurde. Ich darf auf keine Bewunderung Anspruch machen, wenn ich unter so glücklichen Verhältnissen wesentliche Lücken der Maschinenlehre ausfüllte und hiermit die Mechanik wirklich bereicherte. Ich hatte auch das Vergnügen, daß spätere Schriftsteller diese Erweiterungen benutzten, und fand mich, auch ohne Benennung meines Namens, sehr geehrt. Um indessen Irrungen in einer künftigen Geschichte der Mathematik, besonders in Bezug auf Maschinenlehre vorzubeugen, hielt ich es für etwas nicht ganz unverdienstliches, in der Kürze zusammenzustellen und selbst zu bemerken, was die Maschinenlehre eigentlich meinen Bemühungen verdanke. Ich halte mich überzeugt, hiermit meinen Freunden einen nicht unangenehmen Dienst erwiesen zu haben; und, ich wiederhole es noch einmal, Feinde kenne ich nicht, indem ich hoffe, daß Hr. Baader in München (ein trefflicher Techniker), der mich vor vielen Jahren in der That feindlich behandelte, sich nicht aufs Neue als einen Solchen ankündigen wird. Dieses also ist der Hauptzweck dieser Blätter. Nebenbei wollte ich, um die Leser schnell auf die ersten Gründe zurückzuführen und sie in Bezug

auf Grundformeln nicht wieder auf besondere Schriften hinzuweisen, dergleichen wegen ihres allzuhäufigen Gebrauchs und Zusammenhanges mit dem übrigen Vortrage, hier zugleich mit beifügen. Dieses ist an einigen Stellen und besonders in Bezug auf die ersten Blätter zu bemerken. Außerdem habe ich einige Gegenstände im 9ten und den folgenden Kapiteln mitgenommen, welche in besonderen Fällen dem praktischen Mechaniker wichtig werden können, und in anderen hierher gehörigen Schriften theils gar nicht, theils nicht zweckdienlich behandelt werden. Die von mir zuerst in die Mechanik eingeführte Theorie der ungleichförmig wirkenden Maschinen hat mich auch in dieser Schrift vorzüglich beschäftigt. Man wird aber bald bemerken, daß ich sie nicht so geradehin in ihrem älteren Gewande hierher versetzt habe. Zum Vortheile der Rechnungen habe ich die Theorie des Krumzapfens einer Bürde entledigt, die ihr sehr lästig war, indem ich der Fundamentalgleichung die vorige transscendentische Form abgenommen und ihr dagegen eine algebraische gegeben habe, die sie für die Ausübung bei weitem geschickter macht. Zugleich habe ich hier die damit zusammenhängende Theorie der Schneidmühlen beigefügt, die von Belidor und selbst von dessen würdigen Emendator, Karsten, zu nachläßig behandelt worden ist. Karsten hat überhaupt bei der großen Umsicht, mit der er Maschinenberechnungen behandelte, auf den Unterschied zwischen gleichförmig wirkenden und ungleichförmig wirkenden Maschinen keine Rücksicht genommen, dagegen aber oft Mühe, Zeit und Zahlen verschwendet, um einen Nebenumstand und das Plus oder Minus von Reibung an dieser oder jener Stelle in Rechnung zu bringen, als ob von der Berechnung einer Kometenbahn die Rede wäre, und als ob wir bei Friktionsberechnungen und bei Berechnungen, die auf den Effekt eines Wasserrades Bezug haben, wirklich solche Feinheiten erreichen könnten. Solche Subtilitäten sind in physisch mathematischen Untersuchungen, wo es schon an Genauigkeit der physischen Voraussetzungen fehlt, auf welche die ganze Berechnung gebaut wird, auf der einen Seite ohne Nutzen, auf der anderen erschweren sie die Rechnung. Ebendarum darf es auch nicht befremden, wenn man in dieser Schrift solche Feinheiten nicht beachtet und oft von 5 Decimalstellen im Resultate nur 2 beibehalten, auch bei etwas bedeutenden ganzen Zahlen angehängte Brüche entweder ganz weggeworfen oder dafür die ganze Zahl um 1 vergrößert findet. Aber der Unterschied zwischen gleichförmig und ungleichför-

mig wirkenden Maschinen kann nicht bei Seite gesetzt werden, weil bei ihnen ganz verschiedene Gesetze der Bewegung statt haben, und eine allgemeine Theorie einer Maschine nothwendig auf die dabei eintretenden Gesetze der Bewegung begründet werden muß, wenn sie für alle Fälle anwendbar werden soll. Nur in den einzelnen Fällen der Anwendung läßt sich dann entscheiden, ob die Ungleichförmigkeit von der Art ist, daß ihr Bezug auf das Verhältniß zwischen Kraft und Last beachtet zu werden braucht. Mit der Nichtachtung des ungleichförmigen Beharrungsstandes des Wasserrades bei einer Schneidmühle hat Karsten zwei Umstände bei Seite gesetzt, die auf den Gang der Maschine mehr oder weniger Einfluß haben: 1) die abwechselnden Momente der Last an der Kurbel, 2) die Masse des Sägegatters mit Zubehör. Er begnügte sich, auf das Gewicht desselben die gehörige Rücksicht genommen zu haben. Auf diesem Wege konnte er also zu keinem allgemein gültigen Resultate gelangen. Noch andere Fehler wird man in dieser Schrift bemerkt finden. Auch das von ihm mit Belidorn angenommene Verhältniß zwischen dem Widerstande des Holzes beim Durchschneiden und dem Gewichte des Gatters ist ein für die Ausübung unstatthaftes Resultat. Das Gatter muß vielmehr in allen Fällen so leicht als möglich gemacht werden. Weitere zweckmäßige Einrichtungen findet man gehörigen Orts angegeben. Weil ich, was zu genau zusammenhängt und immer vorkommt, zum Vortheile der Leser gerne zusammenstellen wollte, um für vollkommnere Maschinenanordnungen und richtigere Berechnungen gleichsam ein Noth- und Hülfsbüchlein in die Hände zu geben, so habe ich zugleich die allgemeinen Formeln für Wasserräder beigefügt, und zwar in höchst einfacher Form, wo ich zugleich ihre ebenso einfache Anwendung auf den Effekt der Getraidmühlen gezeigt habe, zur Bestimmung der Getraidmenge, welche in 24 Stunden abgemahlen werden kann; womit sich selbst blos praktische Schriftsteller nicht befaßt haben. Denselben Fehler, wie bei den Schneidmühlen, hat unser guter Karsten (ein wahrlich trefflicher und in jeder Rücksicht verehrungswürdiger Mann und ächter Mathematiker, den ich ungerne eines Fehlers zeihe) auch bei den Stampfmühlen begangen, wohin im Allgemeinen auch die Hammerwerke gehören. Die richtige schon vormals von mir mitgetheilte Theorie, unter der Voraussetzung, daß mit dem Abfalle eines Stampfers zugleich das Ergreifen eines neuen also ohnunterbrochene gleiche Last verbunden sey, habe ich hier keiner Abänderung benöthigt befunden, aber

ich habe sie verallgemeinert. Die Theorie der Hammerwerke habe ich selbst noch nie vorgetragen; sie unterscheidet sich von der der Stampfwerke nur darin, daß bei solchen die obige Voraussetzung nicht statt findet, weil sich nicht soviele Hämmer neben einander als Stampfer anlegen lassen, und nie soviele, daß mit dem Abfalle eines Hammerhelms zugleich das Ergreifen eines neuen Helms verbunden wäre. Hier lauft also in Zwischenzeiten das Rad leer, welches die Rechnung erschwert. Man wird aber finden, daß dennoch die am Ende hervortretende Formel für die Ausübung nicht sehr beschwerlich wird. Ebendiese Formel dient nun auch zugleich zur Verallgemeinerung der Theorie der Stampfwerke. Die Theorie der Röhrenleitungen, bei welcher Dübuat, ich mögte sagen unverantwortlich, gekünstelt hat, um eine allgemeine Formel herauszudrechseln, hat selbst dieser Hydrauliker nicht gehörig zu benutzen verstanden. Bei den mannigfaltigen praktischen Arbeiten und so vieljährigen Beschäftigungen mit Untersuchungen der Art konnte mir ihre Anwendung bei Pumpwerken, Röhren- und Springbrunnen nicht entgehen. Meine Freunde werden mir daher auch die Gerechtigkeit widerfahren lassen, zuerst eine richtige Theorie der Pumpwerken, der Röhren- und Springbrunnen aufgestellt zu haben. Was Karsten hiervon sagt, ist für die Ausübung durchaus unbrauchbar. Höchst wichtig ist die Theorie der Bewegung des Wassers in Kanälen. Nichts ist sonderbarer, als der Vorwurf, daß keine Theorie erträgliche Resultate für die Bewegung des Wassers in natürlichen Flußbetten gebe, als ob der Mathematiker z. B. verlange oder je verlangt habe, daß die Theorie oberschlächtiger Räder auch noch vor einem Rade gelten solle, dessen Kränze nicht ringförmig gebildet, sondern etwa aus 6, 8, 10 geraden Balken verschiedener Länge zusammengesetzt wären. Es ist unendlich viel werth, Gesetze gefunden zu haben, welche die Bewegung des Wassers in regulären Kanälen so genau befolgen, daß wir sie in der Ausübung immer mit hinlänglicher Sicherheit zum Grunde legen können, indem wir dabei auf die Größe der möglichen Abweichung gehörige Rücksicht nehmen. Der Ritter von Wiebeking hat zwar ihre Anwendbarkeit selbst bei regulären Kanälen in Zweifel gezogen und in mehreren Fällen der Ausübung sie sehr verdächtig zu machen gesucht. Ich bitte aber diejenigen meiner Leser, welche hierüber genauer unterrichtet zu seyn wünschen, meine ausführliche Beurtheilung der Wiebekingschen Wasserbaukunst (Hallische Zeit. 1814 und 1815, vieh

leicht auch noch von 1813) mit Aufmerksamkeit durchzulesen. Sie werden, was in der That merkwürdig ist, finden, daß die Anwendung in dortigen Fällen, womit der berühmte Verfasser die angenommenen Gesetze verdächtig machen wollte, jene Gesetze sogar noch bestätiget. Diese Lehre ist eine der schönsten und wichtigsten Bereicherungen der neueren Hydraulik, von der jene großen Beförderer und Erweiterer der Mathematik Jakob-Daniel- und Johann Bernoulli, Wolf, Euler, Lambert u. a. noch nichts ahneten. Selbst Kästner und Karsten haben uns in ihren mathematischen Werken, obgleich damals französische Hydrauliker sich schon mit diesem Gegenstande beschäftigt hatten, noch nichts brauchbares darüber mitgetheilt. Mein Lehrbuch der Hydraulik ist, wie meine Freunde wissen, das erste teutsche Werk, das hierüber ausführlichen Unterricht ertheilt, und die Teutschen auf Dübuats Verdienste aufmerksam gemacht hat. Im Grunde ist aber die weit einfachere Chezysche Formel schon hinreichend, bei deren Gebrauch ich es auch in vorkommenden Fällen immer gelassen habe. Diese neuere Erweiterung der Hydraulik, die also ursprünglich französischen Hydraulikern zugehört, konnte in der gegenwärtigen Schrift, ihres großen Nutzens wegen, nicht übergangen werden. Noch später hat Prony in Bezug auf die vorliegenden von Dübuat schon mitgetheilten Beobachtungen diesen Gegenstand von neuem bearbeitet. Hier habe ich die verschiedenen Formeln von Girard, Chezy, Dübuat und Prony mitgetheilt. Sie haben den gemeinschaftlichen Fehler der Beschränktheit auf den Parallelismus zwischen der Oberfläche des fliesenden Wassers und der Bodenfläche des Kanals, wodurch sie dann auch auf Kanäle mit horizontalem Boden unanwendbar werden. So sind sie auch unanwendbar auf Kanäle, die sich allmählig erweitern oder verengern, oder in welchen die Wassertiefe wegen einer am Ende angebrachten Fallschütze allmählig zunimmt. Ueberhaupt setzen sie gleichförmige Bewegung längs dem ganzen Kanale voraus, welches dann natürlich auch auf die Voraussetzung jenes Parallelismus führte. Für die angenommenen Fälle bleibt nun die Chezysche Formel immer die bequemste. Sie ist aber vorzüglich von denen, die sie am meisten getadelt haben, nicht einmal richtig verstanden worden. Weil sie aus der Breite und Tiefe des Wassers und dem Gefälle die in jeder Sekunde abfliesende Wassermenge oder auch die Geschwindigkeit angiebt, so ist sie selbst auf abschüßige Fluther angewendet worden, um die Geschwindigkeit

des Wassers in einem solchen Fluther zu berechnen, welches augenscheinlich gegen die Natur der Formel streitet, da die Bewegung des Wassers im solchem Falle eine beschleunigte ist, wenigstens auf eine bestimmte Länge, die ein solches Fluther oft nicht einmal hat. Die Geschwindigkeit welche die Formel giebt, ist keineswegs die, mit welcher das Wasser über einen Boden bei gegebenem Gefälle abfließt, sondern der sie sich bei gehöriger Länge des Bodens immer mehr nähert und die sie endlich erreicht, und die sie dann bei unverändertem Abhange und unveränderter Breite bei fernerem Abfliesen auch beibehält; oder sie bestimmt bei gegebenem Abhange nur diejenige Geschwindigkeit, bei welcher das Wasser in der angenommenen Tiefe mit gleichförmiger Bewegung fortzufliesen vermag. Richtig angewendet giebt sie immer erträgliche und befriedigende Resultate. Aber die oben angegebenen Beschränkungen setzen ihrem Gebrauch oft Gränzen, wo er nicht mehr statt hat, und wo dann der Wunsch einer größeren Allgemeinheit eintrit, der jene Beschränkungen nicht mehr im Wege stehen. Ich habe es mir daher angelegen seyn lassen, dieser Theorie eine größere Vollkommenheit zu geben, und vor einigen Jahren der königl. Akademie zu München eine Abhandlung über diesen Gegenstand vorgelegt, die auch in ihren Kommentarien 1812 erschienen ist. Aus derselben habe ich die hierher gehörigen allgemeinen Formeln hier gleichfalls mitgetheilt, weil sie zu den wesentlichen Erweiterungen der Hydraulik gehören. Daß ich den Bélier hydraulique als eine von allen bisherigen wesentlich verschiedene Maschine und als eine Erfindung unseres Zeitalters hier nicht übergehen würde, wird man ohnehin erwarten. Es ist bemerkenswerth und für meine Behauptung, daß die französischen Mathematiker bei ihrem starken Vorschreiten in der Mathematik dennoch in der Maschinenlehre zurückstehen, sehr sprechend, daß in Frankreich selbst, wo diese Maschine zuerst zum Vorscheine gekommen ist, nichts zur näheren Aufklärung dieser Maschine geschehen ist. Sogar wurde öffentlich versichert, daß die Künstler sehr viele Schwierigkeiten gefunden hätten, die Maschine, zu deren näherer Untersuchung einige Mitglieder der Akademie beauftragt waren, in deren Gegenwart spielen zu lassen, und daß solches bei deren ersten Erscheinung durchaus nicht habe gelingen wollen. Sie mußten einen andern Tag festsetzen, um den Fehler zu entdecken und zu beseitigen. Ich hatte keinen Pariser und überhaupt gar keinen eigentlichen Künstler zur Verfertigung eines Modells und sein Spiel gieng sogleich bei der

ersten Probe trefflich von statten. Versuche von ihnen sind keine bekannt geworden; die blieben teutschem Fleiße überlassen, dem verdienstvollen Herrn Eytelwein in Berlin. An eine Theorie dieser Maschine hat sich noch weniger ein französischer Mathematiker gewagt, weil es ihnen an einer dazu vorbereitenden Hydraulik in ihrer Sprache fehlte. So sehr ich bei aller Vorbereitung, die mir meine früheren Arbeiten selbst darbothen, die Schwierigkeit einer solchen Theorie fühlte, so ließ ich mich doch dadurch nicht abhalten, meine Kräfte daran zu versuchen, und ich glaube solche in der gleichfalls von der königl. Akademie zu München zum Druck beförderten Abhandlung über diesen Gegenstand genügend entwickelt zu haben. Hier konnte ich diese Abhandlung nur nennen, aber keinen Auszug daraus liefern. In einigen Fabriken, wo man den Maschinen die größtmögliche Vollkommenheit zu geben beflissen war, habe ich die Wellzapfen der Wasserräder auf Friktionsräder aufgelegt gefunden. Man verband übrigens mit dieser Einrichtung Begriffe, die sich von richtigen mechanischen Grundsätzen entfernten; man glaubte sogar durch richtige Lagerung der Wellzapfen alle Nachtheile der Reibung vollends beseitigen zu können. Dieses und die mangelhafte Theorie von Karsten, der mit der richtigen Lagerung der Zapfen auf solchen Friktionsrädern ganz unbekannt war, gab mir Veranlassung zu der kurzen Abhandlung über die Friktionsräder, die ich sehr hätte ausdehnen können, wenn ich mich nicht auf die vortheilhafteste Lagerung beschränkt hätte. Die herzförmige Scheibe kommt vorzüglich bei einer Art von Maschinen vor, die unter die wichtigsten des bürgerlichen Lebens gehören, und die wenige Lehrer der Mathematik und der Mechanik insbesondere (letztere wird nicht selten von Mathematikern vorgetragen, die freilich nur von dem Katheder herab von Männern, die gleiches Geschick hatten, gebildet worden sind,) nur oberflächlich kennen, bei der englischen Spinnmaschine. Ich hielt sie daher für wichtig genug, ihrer hier zu erwähnen, da sie bei keinem mir bekannten mechanischen Schriftsteller vorkommt, und die Berechnung der an ihrer Aussenfläche eintretenden Reibung auf die Rektifikation der Herzlinie führt, deren Betrachtung keinem Analytiker beifällt, der sich bei der Conchoide, Cissoide, Spirallinien u. d. gl. so ernsthaft aufhält, als ob er das Interesse der bürgerlichen Gesellschaft bezielte. Was ich endlich vom Druck einer Last und ihrer Vertheilung auf mehrere Unterlagen vor-

getragen habe, wird man schon um deßwillen nicht überflüssig finden, weil dieser Gegenstand in den Anfangsgründen der Statik und selbst in ausführlicheren Lehrbüchern ganz übergangen zu werden pflegt, wie Karstens Lehrbegriff und Prony's hydraulische Architektur beweisen. Die aber auch davon gehandelt haben, wie Euler und Ide, scheinen sich mehr der Spekulation überlassen als an eine Anwendung gedacht zu haben. Man wird finden, daß ich zu Resultaten von ganz anderer Art gelange. Die drei letzten Kapitel (XIV — XVI) habe ich erst noch beigefügt, da diese Schrift schon unter der Presse war. Die besondere Veranlassung zu diesem späteren Nachtrage habe ich in der Schrift selbst angegeben.

Heidelberg den 10. April 1816.

K. C. Langsdorf.

Inhalt

Seite

Erstes Kapitel.

Gesetze der Bewegung, wenn veränderliche Kräfte in die Atome wirken; auch für unveränderliche. 1

Zweites Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen. . . . 18

Drittes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in regulären offenen Kanälen. 69

Viertes Kapitel.

Vom Gebrauch der Trägheitsmomente. 98

Fünftes Kapitel.

Einige Bemerkungen über Wasserräder und Vorgelege. . . 108

Sechstes Kapitel.

Theorie des Krumzapfens oder der Kurbel. 124

Siebentes Kapitel.

Theorie der Sägemühlen. 157

Achtes Kapitel.

Theorie derjenigen ungleichförmigen Maschinen, bei welchen von Periode zu Periode neue Massen aus der Ruhe in Bewegung gesetzt werden, so daß plötzliche Geschwindigkeitsänderungen erfolgen. Stampf- und Hammerwerke. . . . 183

Seite

Neuntes Kapitel.

Einige Bemerkungen über lothrechte Erhebungen. 209

Zehentes Kapitel.

Bemerkungen über die Friktionsräder. 229

Eilftes Kapitel.

Vertheilung der Last über ihren Unterstützungspunkten. . . 236

Zwölftes Kapitel.

Von einigen nützlichen Wasserförderungen. 246

Dreizehentes Kapitel.

Roberwal's Wage. 254

Vierzehentes Kapitel.

Nähere Bestimmungen über den Ausfluß durch Oeffnungen in etwas dicken Wänden: (s. II. Kap. §. 15). 258

Fünfzehentes Kapitel.

Von Reichenbachs Verbesserungen der Dampfmaschinen. . . 265

Sechzehentes Kapitel.

Ueber die Wirkung des Windstosses bei Windmühlenflügeln. . 271

Erstes Kapitel.

Gesetze der Bewegung, wenn veränderliche Kräfte in die Atome wirken; auch für unveränderliche.

§. 1.

In Bezug auf Körper in der Nähe unserer Erdoberfläche und insbesondere in der Anwendung auf Maschinenlehre und auf Gegenstände, die mit ihr in Verbindung stehen, können wir die Schwerkraft oder Schwere als eine unveränderliche absolute Kraft = 1 setzen, und nun jede andere veränderliche Kraft für einen bestimmten Augenblick oder für eine bestimmte Stelle im Raume durch f ausdrücken, so daß f ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Bruch wird, nachdem eine kleinere oder größere Kraft, als die unserer Schwere ist, damit bezeichnet wird.

§. 2.

Die Größe des Eindrucks, den unsere Schwere jeden Augenblick in einen einzelnen Atom eines Körpers macht, bestimmt die Größe ihrer beschleunigenden Kraft; wir bestimmen sie durch die Größe des Raums, durch welchen sie einen ihrer Wirkung ganz frei ohne allen Widerstand überlassenen Körper in der 1ten Sekunde bewegt, und bezeichnen diesen Raum im allgemeinen mit g. Für alle An=

wendungen, die wir, außer der Astronomie, davon zu machen haben, ist es hinlänglich

$g = 15, 1$ Par. F oder auch $= 15, 5$ rhl. F.

zu setzen.

§. 3.

Zur Rückerinnerung fügen wir in Bezug auf die freien Wirkungen unserer Schwere die nachstehenden Formeln bei. Dabei ist h der in der Zeit t d. h. in t Sekunden durchlaufene Raum, c die am Ende von t Sek. erlangte Geschwindigkeit:

I. $h = t^2 . g$

II. $c = 2gt$

III. $t = \sqrt{\frac{h}{g}}$ oder auch $= \frac{c}{2g}$

IV. $h = \frac{c^2}{4g}$

V. $c = 2\sqrt{gh}$

Wird ein Körper mit einer bestimmten Geschwindigkeit c in einer Richtung abgeworfen, die der unserer Schwere entgegengesetzt ist, so bleibt ihm, wann er einen bestimmten Raum v durchlaufen hat, nur noch eine bestimmte Geschw. c', und man hat

VI. $c' = \sqrt{(c^2 - 4gv)}$

Auch VII. $c = \sqrt{((c')^2 + 4gv)}$

Für jede Kraft, deren Eindrücke eben so groß, als die der Schwere wären, gelten dieselben Bestimmungen; die Richtung der Kraft, die bei unserer Schwere allemal lothrecht ist, hat auf die Bewegung selbst keinen Einfluß.

§. 4.

Die Summe von Eindrücken, welche die Schwere in jedem Augenblick in sämtliche Atomen eines Körpers macht

oder die bewegende Kraft, welche die Schwere einem Körper mittheilt, welche auch des Körpers Gewicht genennt wird, lernen wir durch Hindernisse kennen, die wir seiner Bewegung entgegen setzen. Zentner, Pfunde, Lothe u. s. w. sind bewegende Kräfte oder Gewichte, welche gesetzlich bestimmten Massen zukommen; sie bezeichnen den Druck, den sie auf eine Tafel ausüben, auf der sie ruhig liegen. Durch Erhebung und Festhaltung solcher Massen mit der Hand lernen wir die Größe verschiedener Gewichte mit unserem Gefühle beiläufig vergleichen. Werkzeuge, welche uns eine genaue Vergleichung geben, heisen bekanntlich Wagen. Die Bewegung des sonst fallenden Körpers wird dadurch verhindert, daß die Tafel oder die Hand die in jedem Augenblick von der Schwerkraft erneuerten und wiederholten Eindrücke der Schwere in demselben Augenblick wieder vernichtet. Ebendarum hat die Tafel oder die Hand in jedem Augenblick nur die einfache Summe momentaner Eindrücke der Schwere in den Körper zu überwinden, so daß das Gewicht während dem Liegen nicht zunimmt; da hingegen in der Bewegung die Summe jener momentaner Eindrücke in jedem kleinen Zeittheilchen unzähligemal wiederholt dem Körper mitgetheilt wird; und ebendarum hat auch jeder fallende und überhaupt jeder in Bewegung befindliche Körper im ersten Augenblick des Anstossens an einen anderen eine unzähligemal größere bewegende Kraft als im Zustande der Ruhe; und darum ist die Wirkung des Stosses sosehr von der des Drucks verschieden.

§. 5.

Die beschleunigende Kraft oder die Größe des momentanischen Eindrucks, den eine absolute Kraft in die einzelnen Atomen einer Masse nach einer bestimmten Richtung in irgend einem vorkommenden Falle macht, läßt sich sehr leicht

mit der beschleunigenden Kraft unserer Schwere vergleichen, sobald wir die Größe des gesammten Eindrucks kennen, den die Kraft nach der gegebenen Richtung in eine bestimmte Masse macht.

Hat nämlich eine Masse M das Gewicht $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}$ der gesammte Eindruck unserer Schwerkraft in alle Atomen der Masse M; ist nun die Summe aller Eindrücke, vermöge deren dieselbe Masse M von einer anderen Kraft f in Bewegung gesetzt wird, so daß alle Atomen sich mit gleicher Geschw. bewegen müssen, $= \mathfrak{M}'$, und besteht der Körper M aus N Atomen, so ist für die Masse M

$$\left.\begin{array}{l} \text{die beschl. Kraft unserer Schwere} = \dfrac{\mathfrak{M}}{N} \\[2ex] \text{die beschl. Kraft } f = \dfrac{\mathfrak{M}'}{N} \end{array}\right\} \text{ also Schwerkraft} : f = \mathfrak{M} : \mathfrak{M}'$$

Setzen wir also die Schwerkraft $= 1$, wie hier allemal geschieht, so hat man

$$\text{VIII.} \quad f = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}$$

Bezeichnen wir nunmehr den Raum, welchen M in der ersten Sek. vermöge der Eindrücke der Kraft f durchläuft, mit g, so hat man

$$\text{IX.} \quad g = f.\, g = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} \cdot g$$

und alle Gleichungen (I bis VII) gelten auch für diese Kraft f, wenn man darin g oder $\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} \cdot g$ statt g schreibt, wofern $\mathfrak{M}'$ also auch f während der Bewegung ungeändert bleibt.

§. 6.

Wären mehrere Massen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (wo diese Buchstaben allemal die Gewichte der Massen ausdrücken) so mit

einander verbunden, daß sie, in Bewegung gesetzt, gleichzeitige Geschwindigkeiten annehmen müssen, die sich wie c, c', c'' verhalten, so könnte man alle 3 Massen zusammengenommen als eine einzige M betrachten, welche mit einerlei Geschw. bewegt werden sollte, wenn man

$$\text{X.} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \left(\frac{c'}{c}\right)^2 . \mathfrak{B} + \left(\frac{c''}{c}\right) . \mathfrak{C}$$

setzt; oder wenn man M so nimmt, daß

$$\text{XI.} \quad \mathfrak{M} . c^2 = \mathfrak{A} . c^2 + \mathfrak{B} . (c')^2 + \mathfrak{C} . (c'')^2$$

wird.

Geschieht die Bewegung durch Umdrehung um eine Axe, von der die Atome der Masse A in der Entfernung α, die der Masse B in der Entfernung β, die der Masse C in der Entfernung γ abliegen, so hat man statt (XI) auch

$$\text{XII.} \quad \mathfrak{M} . \alpha^2 = \mathfrak{A} . \alpha^2 + \mathfrak{B} . \beta^2 + \mathfrak{C} . \gamma^2$$

und statt (X)

$$\text{XIII.} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 . \mathfrak{B} + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 . \mathfrak{C}$$

Produkte, wie die vier in XI und XII heißen Trägheitsmomente der Massen M, A, B und C, und M (XI u. XIII) ist der auf einerlei Geschw. oder auf einerlei Entfernung von der Umdrehungsaxe reducirte Werth der Massen A, B und C zusammengenommen.

§. 7.

Da ein um eine Axe sich drehendes Prisma, Cylinder oder Ring aus unendlich vielen Atomen besteht, die alle in verschiedenen Entfernungen von der Axe abliegen, so läßt sich das Trägheitsmoment solcher Massen nur durch Summirung unendlich vieler einzelner Trägheitsmomente finden.

Die Differentialrechnung kürzt dieses Verfahren ab, und giebt uns folgende Resultate:

Wenn der Abstand des entferntesten Atoms von der Umdrehungsaxe seines Prismas $=$ a und die Masse dieses Prismas, die nur auf einer Seite der Axe angenommen wird, $=$ A ist, und Tr. ihr Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe bezeichnet, so ist

XIV. $Tr. A = \frac{1}{3} a^2 . A$

und ihre auf die Entfernung a reducirte Masse

XV. $M = \frac{1}{3} A$

Ebenso für einen Cylinder vom Halbmesser r, der sich um seine Axe dreht,

XVI. $Tr. A = \frac{1}{2} r^2 . A$

und

XVII. $M = \frac{1}{2} A$

Auch für einen Kranz oder Ring, dessen Masse $=$ A, innerer Halbm. $=$ r und äußerer $=$ R ist,

XVIII. $Tr. A = \frac{1}{2} (R^2 + r^2) . A$

XIX. $M = \frac{R^2 + r^2}{R^2} . A$

wo M die auf den äußeren Umfang reducirte Masse ist. Wenn R der mittlere Halbmesser $\left(\frac{R + r}{2}\right)$ ist, so giebt für die allermeisten Fälle der Ausübung der Ausdruck

XX. $Tr. A = \frac{1}{2} R^2 . A$

hinlängliche Genauigkeit.

§. 8.

Die bewegende Kraft, welche bei einem Systeme von Massen irgendwo angebracht oder wirkend die Bewegung an dieser Stelle erzeugt, läßt sich leicht nach den statischen Grundlehren bestimmen; hiermit erhält man M', aus (§. 7.)

findet man M für dieselbe Stelle, und dann hat man f und g aus VIII und IX.

Ex. An einer cylindischen 8′ langen und 1′ dicken Welle zu 130 ℔ sind 2 Räder oder Kränze angebracht; der innere Halbm. des größeren ist 5′, der äußere 6′; der innere des kleineren 3′, der äußere 4′; der grössere wiegt 500 ℔, der kleinere 300 ℔. Bei ersterem kommen noch 6 Aerme zu 5′ lang und jeder zu 36 ℔ schwer, bei letzterem 6 Aerme zu 3′ lang und jeder zu 20 ℔ schwer in Rechnung.

Um den Umfang des größeren ist ein Seil gewunden, an dessen herabhängendem Ende ein Gewicht von 130 ℔ befestigt ist; auf gleiche zieht Weise am kleineren nach entgegengesetzter Richtung ein Gewicht von 170 ℔.

Wie tief wird das Gewicht von 130 ℔ in 5 Sek. sinken.

Der Druck auf die Wellzapfen ist

$$130 + 500 + 300 + 36 + 20 + 130 + 170$$
$$= 1286 \text{ ℔}$$

also

Reibung an den Zapfen beiläufig $(\frac{1}{6}) = 214$ ℔

Der Halbm. der Zapfen sey $= 0, 1'$, so ist derjenige Theil von dem 130 pfündigen Gewicht, welcher mit der Reibung im Gleichgewicht ist,

$$= \frac{0,1}{6} \cdot 214 = 3,6 \text{ ℔ bei nahe.}$$

Derjenige Theil desselben Gewichts, welcher mit den 170 ℔ im Gleichgewicht ist, ist

$$= \frac{4}{6} \cdot 170 = 113,3 \text{ ℔}$$

also bleibt noch in der Entfernung von 6′ von der Axe

Ueberwucht oder auf Bewegung verwendete bewegende Kraft $M' = 130 - (3,6 + 113,3)$

$= 13$ ℔

Jetzt folgt die Berechnung von M.

Jene 13 ℔ Ueberwucht wirken nämlich 6′ weit von der Axe, also entsteht die Frage: wie wirkt diese bewegende Kraft in die gesamte Masse, deren Atomen in unendlich vielen verschiedenen Entfernungen von der Axe zerstreut sind?

Es giebt nun eine Masse M, die am Umfange des grössern Kranzes angebracht in Bezug auf Bewegung ganz denselben Erfolg geben würde, den alle zerstreute Atomen zusammengenommen geben; und diese Masse M findet man (§. 6 und 7)

1) Die auf ihren Umfang ($\frac{1}{2}$ Fuß von der Axe) reducirte Wellenmasse ist $= \frac{130}{2} = 65$ ℔, also 6′ weit von der Axe reducirt

$$= \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{6}\right)^2 \cdot 65 = 2,71 \text{ ℔}$$

2) Die Masse des größeren Kranzes 6′ weit von der Axe reducirt

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{36 + 25}{36} \cdot 500 = 424 \text{ ℔}$$

3) Die des kleineren 4′ weit von der Axe reducirt,

$$= \frac{1}{2} \frac{16 + 9}{16} \cdot 300 = 234 \text{ ℔}$$

also 6′ weit von der Axe

$$= \frac{16}{36} \cdot 234 = 104 \text{ ℔}$$

4) Ein Arm von der Axe aus 5′ lang, auf 5′ Entfernung reducirt

$$= \frac{1}{3} \cdot 36 = 12 \text{ ℔};$$

auf 6′ reducirt

$$= \frac{25}{26} \cdot 12 = 8\tfrac{1}{3} \text{ ℔}$$

also

für 6 Aerme $= 6 . 8\tfrac{1}{3} = 50$ ℔

5) Ein Arm von der Axe aus 3′ lang, auf 3′ Entfernung reducirt

$$= \tfrac{1}{3} \cdot 20 = 6\tfrac{2}{3} \text{ ℔.}$$

auf 6′ Entfernung $= \tfrac{1}{4} \cdot 6\tfrac{2}{3} = 1\tfrac{2}{3}$ ℔

also

für 6 Aerme $= 6 . 1\tfrac{2}{3} = 10$ ℔

6) Das 170 pfündige Gewicht auf 6′ reducirt

$$= \frac{16}{36} \cdot 170 = 75,55$$

7) Das 130 pf. Gewicht bleibt für die Entfernung von 6′ = 130 ℔.

Man hat also

für die gemeinschaftliche Entfernung von 6′ für alle Atomen zusammengenommen	M = 2,71 + 424
	+ 104,00 + 50
	+ 10,00 + 75,55
	+ 130,00
	= 246,71 + 549,55
	= 796 ℔

Diese reducirte Massensumme wird durch die in derselben Entfernung von 6′ wirkende bewegende Kraft von nur 13 ℔ in Bewegung gesetzt; man hat also nunmehr aus (IX)

$$g = \frac{13}{796} \cdot g = \frac{13}{796} \cdot 15,6' = 0,254 \text{ rhl. F.}$$

folglich (I)

Die Tiefe, zu welcher die 130 pfündige Masse in 5 Sek. herabsinkt $\Big\} = 25 . 0,254 = 6,35$ rhl. F.

Anm. In Fällen der Ausübung, wie bei Maschinen im Großen erschwert man sich ohne allen Nutzen die Berechnung, wenn man bei Bestimmungen, welche wenig Einfluß auf das letzte Resultat haben können, mit aller mathem. Schärfe rechnen will. Daher ich auch hier keine solche Schärfe beobachtet habe. Ich habe z. B. zur Bestimmung der Reibung auch das 130 pfündige Gewicht ganz in Rechnung gebracht, da doch 10 ℔ auf Bewegung verwendet worden. Ich habe Masse (und Gewicht) des Seils ganz außer Acht gelassen (Das veränderliche Gewicht der herabhängenden Seilstücke könnte allerdings in manchen Fällen das Resultat merklich ändern, hier aber, wo ich f als unveränderlich angenommen und noch nichts von veränderlichen Kräften gesagt habe, konnte ich das Seil als dünne genug voraussetzen, um den Einfluß seines Gewichts auf das letzte Resultat bei Seite setzen zu können.). So habe ich auch den in der Welle steckenden Theil der 12 Aerme doppelt in Rechnung gebracht: einmal als Theil der Welle, und zum andernmal als Theil der Aerme. Aber deßfallsige Korrektionen wären für das Resultat am Ende aller Rechnung unbemerkbar und im Grunde lächerlich, weil wir weder die Massen der einzelnen Theile nach ihren Gewichten, noch auch die Größe des Reibungskoefficienten ($\frac{1}{6}$) in einiger Schärfe anzugeben vermögen. Sagar lehrt uns schon das vorstehende Beispiel, daß bei Anwendungen auf Maschinen im Großen, wenn die Wellen nicht ausgezeichnet groß sind, ihre Massen ganz außer Acht gelassen werden können, zumal bei Maschinen, deren Wirkung von noch mehreren ungewissen Bestimmungsgrössen so abhängen, daß wir uns immer nur mit einem

beiläufigen Resultate begnügen müssen. Bei vielen in der Folge vorkommenden Berechnungen muß man auf diese Anmerk. Rücksicht nehmen, wenn man manche meiner Berechnungen etwa nicht scharf genug und durch eigenes Nachrechnen etwa andere Resultate finden sollte.

Uebrigens wollte ich, gegen die Ueberschrift dieses Kapitels, die vorstehenden Sätze dem ausübenden Mathematiker oder Baumeister gerne ins Gedächtniß wieder zurück rufen, und sie hier in der Kürze zusammenstellen, um sie, bei etwa noch nicht hinlänglicher Geläufigkeit, nicht jedesmal in einer anderen Schrift nachschlagen zu müssen, und dieses umsomehr, weil sie allen folgenden Lehren zur Grundlage dienen.

§. 9.

Wäre ϕ (ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch) eine unveränderliche Kraft, unsere Schwerkraft = 1 gesetzt, und wären s und h die Räume, welche ein Atom in der Zeit t vermöge der Kraft ϕ und vermöge unserer Schwerkraft durchlaufen müßte, so hätte man

$$\text{XX.} \quad s : h = \phi : 1$$

Bezeichnen Δs, Δh die in einem kleinen Zeittheilchen Δt durchlaufenen Räume, so ist ebenso

$$\Delta s : \Delta h = \phi : 1$$

Wirkt am Anfange eines solchen Zeittheilchens eine veränderliche Kraft f, so bleibt nun, die Veränderlichkeit für jedes auch noch so kleine Zeittheilchen vorausgesetzt, nicht mehr

$$\Delta s : \Delta h = f : 1$$

Doch muß sich diese Proportion nothwendig der Wahrheit destomehr nähern, je kleiner Δt genommen wird; und man erhält in vollkommener Schärfe

$$\text{XXI.}\quad ds : dh = f : 1$$

$$\text{oder } f = \frac{ds}{dh}$$

in Bezug auf gleiche Zeittheilchen.

Sollte ein Atom, der von der Kraft ϕ getrieben den Raum s durchlauft, dieselbe Geschw. erlangen, die er von der Schwere durch den Raum h getrieben erlangen würde, so müßte vermöge (V und IX)

$$2\sqrt{\phi g . s} = 2\sqrt{gh}$$

seyn, also $\phi = \frac{h}{s}$; aber für eine veränderliche Kraft f gilt nur

$$\text{XXII.}\quad f = \frac{dh}{ds}$$

in Bezug auf erlangte gleiche Geschwindigkeiten.

§. 10.

Wären H und S ähnliche Räume, wie h und s am Ende des vor §, nur größer, so wäre ebenso $\phi = \frac{H}{S}$, also $\frac{H}{S} = \frac{h}{s}$, oder H : h = S : s, also auch

$$\frac{H - h}{h} = \frac{S - s}{s}$$

Wäre nun h nur unendlich wenig von H, folglich auch s unendlich wenig von S verschieden, so hätte man

$$\frac{dh}{h} = \frac{ds}{s}$$

$$\text{oder } \frac{dh}{ds} = \frac{h}{s} = \phi$$

wo allemal ϕ eine unveränderliche Kraft bezeichnet.

Ist aber die Kraft veränderlich, so bleibt $\frac{dh}{ds} = f$, nicht aber $\frac{h}{s} = f$.

Der Ausdruck (XXII) könnte nur für den Anfang der Bewegung, deren Geschw. mit o anfängt, zu gelten scheinen. Er gilt aber für jede Stelle des in Bewegung gesetzten Atoms. Hat nämlich ein Atom, von der Schwere durch den Raum h getrieben, dieselbe Geschw. c erlangt, wie von der veränderlichen Kraft f durch den Raum v getrieben, und wäre am Ende dieser Bewegungen die Geschw. wieder vernichtet, so würden sie mit neu angefangener Bewegung nur unter der Bedingung in dem folgenden Zeittheilchen dt wieder gleiche Geschw. erlangen, wenn für dieses Zeittheilchen $f = \frac{dh}{ds}$ wäre. Diese Gleichheit der bewirkten neuen Geschwindigkeiten muß aber offenbar bleiben, wenn auch jene schon erlangte Geschw. c nicht aufgehoben sondern in beiden Fällen beibehalten wird, weil Gleiches zu Gleichem addirt nichts Ungleiches geben kann. Hat man also den Differentialquotient $\frac{dh}{ds}$, so hat man allemal den Werth von f, was auch h und s für Räume seyn mögen.

§. 11.

Auch hat man, wenn die durch die natürliche Schwere in dem Zeittheilchen Δt erlangte Geschw. mit $\Delta \gamma$ bezeichnet wird, die durch eine andere unveränderliche Kraft ϕ in denselben Zeittheilchen erlangte mit Δc,

$$\Delta \gamma : \Delta c = 1 : \phi$$

aber

$$\Delta \gamma = \Delta t. \, 2g; \text{ also } \Delta t. \, 2g : \Delta c = 1 : \phi$$

Nicht aber $\Delta t. \, 2g : \Delta c = 1 : f$

Doch kommt die letztere Proportion wiederum der Wahrheit desto näher, je kleiner Δt genommen wird, und man hat in aller Schärfe

$$dt . 2g : dc = 1 : f$$

also

$$\text{XXIII.} \quad f = \frac{dc}{2g . dt}$$

§. 12.

Daß einem von einer stetig fortwirkenden absoluten Kraft in Bewegung gesetzten Körper von Augenblick zu Augenblick immer wieder neue Eindrücke beigebracht werden, so daß die Summe einwohnender Eindrücke im Körper von Augenblick zu Augenblick zunimmt, ist oben schon bemerkt worden.

Wirkt aber in einen Körper, dem auf irgend eine Weise eine Geschw. c mitgetheilt worden ist, von diesem Augenblick an sonst weiter keine Kraft, so daß er vermöge der ihm einmal mitgetheilten unveränderlichen Summe von Eindrücken seine Bewegung fortsetzen muß, so wird nothwendig

$$\text{XXIV.} \quad S = t . c$$

wenn c die unveränderliche Geschw. und S den Raum bezeichnet, welcher in t Sek. durchlaufen wird. Dieser Ausdruck druckt das G e s e t z d e r g l e i c h f ö r m i g e n B e w e g u n g oder überhaupt das G e s e t z d e r T r ä g h e i t aus; für $c = 0$ bleibt immerhin $S = 0$.

Man hat also auch $c . \Delta t = \Delta S$. Aber bei einer stetig fortwirkenden Kraft kann nicht $c . \Delta t = \Delta S$ bleiben, wenn c die Geschw. am Anfange des Zeittheilchens Δt bezeichnet, weil dann c sich während dem Zeittheilchen Δt ändert. Wohl aber ist in aller Schärfe

$$\text{XXV.} \quad c . dt = dS$$

Dieser Ausdruck gilt offenbar für alle stetig fortwirkende Kräfte, sie mögen veränderlich oder unveränderlich, also f oder ϕ seyn.

§. 13.

Um vorläufig auf die Art und Weise, wie nun diese allgemeine Formeln gebraucht werden, aufmerksam zu machen, mag folgende Frage dienen.

Aufg. Ein Punkt werde von einem anderen so angezogen, daß sich die Anziehungskraft wie die Entfernung vom anziehenden Punkte verhält; am Anfange der Bewegung sey die Kraft $= \phi$, und die Entfernung vom anziehenden Punkte $= H$; man soll die Geschw. c des angezogenen Punktes ingleichem die Zeit der Bewegung t für den Weg x bestimmen, welchen der Punkt durchlaufen hat.

Aufl. Hier ist die veränderliche Kraft am Ende des Weges x allgemein

$$f = \frac{H - x}{H} \cdot \phi$$

also nach (XXII)

$$\frac{dc}{2g \cdot dt} = \frac{H - x}{H} \cdot \phi$$

Aber nach (XXIII)

$$dt = \frac{dx}{c}$$

also

$$\frac{dc}{2g \cdot \frac{dx}{c}} = \frac{H - x}{H} \cdot \phi$$

oder

$$cdc = \phi \cdot 2gdx - \frac{\phi}{H} \cdot 2gxdx$$

Dieses integrirt, giebt

$$c^2 = \frac{2\phi g}{H} \cdot (2Hx - x^2)$$

und

$$c = \left(\frac{2\phi g}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (2Hx - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dieses im obigen Werthe von dt substituirt, giebt

$$dt = \frac{dx}{\left(\frac{2\phi g}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (2Hx - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$t = \left(\frac{H}{2\phi g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int \frac{dx}{(2Hx - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Man denke sich einen Kreis vom Halbmesser H, in welchem vom Anfange des Durchmessers die Abscisse x genommen wird, so ist, wenn y die zugehörige Ordinate bezeichnet, $2Hx - x^2 = y^2$.

Nehmen wir die zu y gehörige Abcisse aus des Kreises Mittelpunkt, und bezeichnen solche mit u, so ist $y^2 = H^2 - u^2$, und $x = H - u$, also

$$\frac{dx}{(Hx - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{du}{(H^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\left(\frac{du}{H}\right)}{\left(1 - \frac{u^2}{H^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Druckt man also u für $H = 1$ aus, so hat man

$$\frac{dx}{(2Hx - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{du}{(1 - u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$t = \left(\frac{H}{2\phi g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int \frac{-du}{(1 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\sqrt{\frac{H}{2\phi g}}\right) \cdot \text{Arc. Cos}\, u$$

oder

$$t = \left(\sqrt{\frac{H}{2\phi g}}\right) . \text{Arc. Cos} \left(1 - \frac{x}{H}\right)$$

wo keine Const. addirt zu werden braucht, weil für $x = 0$ auch $t = 0$ werden muß.

Für $x = H$ wird Arc. Cos $\left(1 - \frac{x}{H}\right) = \frac{1}{2}\pi$, also in diesem Falle

$$t = \tfrac{1}{2}\pi . \sqrt{\frac{H}{2\phi g}}$$

Vergleichung mit dem Erfolge einer unveränderlichen Kraft.

Bei unveränderlicher Kraft sey die zur Bewegung bis zum Anziehungspunkte erforderliche Zeit $= \tau$, so hätte man aus (III) $\tau = \sqrt{\frac{H}{\phi g}}$; also $t : \tau = \pi . \sqrt{\frac{1}{8}} : 1$.

Aus der Gleichung für c^2 wird ferner, für $x = H$, $c = \sqrt{2\phi g H}$.

Bei unveränderlicher Kraft sey die am Ende von H erlangte Geschwindigkeit $= \gamma$, so hat man

$$\gamma = \sqrt{4 . \phi g H}$$

also

$$c : \gamma = 1 : \sqrt{2}$$

Daher die zu γ gehörige Fallhöhe genau doppelt so groß als die zu c gehörige.

Zweites Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

§. 14.

Zu den wichtigsten späteren Erweiterungen der praktischen Mechanik und insbesondere der Hydraulik gehört die Lehre von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen und in regulären offenen Kanälen. Von letzterer handeln wir im folgenden Kapitel.

§. 15.

Daß das Wasser beim Ausflusse des Wassers aus einem Gefässe durch eine in einer von den Wänden (worunter auch der Boden mitverstanden wird) angebrachte Oeffnung in einen Querschnitt zusammengezogen wird, welcher kleiner als die Oeffnung ist, hatte schon Newton angemerkt. Die älteren Bemühungen in Bezug auf diese Bemühungen findet man in Kästners Hydrodynamik. Späterhin wurden die hierhin gehörigen Bestimmungen noch mehr berichtigt, worüber besonders Bossüts Experimental-Hydraulik nach gelesen werden kann. Hier bemerken wir die Resultate dieser Beobachtungen *).

*) Ich habe bei Oeffnungen, die viel größer waren als bei Bossüt, eigene Versuche angestellt und sehr genau dieselben Resultate gefunden.

Es wird dabei vorausgesetzt:

1) daß das Wasser im Behältnisse die Oeffnung, aus der das Wasser herausströhmt, ringsherum umgebe.

2) daß die rings um die Oeffnung herum im Behältnisse vom Wasser berührte Wandfläche vielmal grösser sey als die Oeffnung.

3) daß der Abstand der Wasserfläche vom oberen Rande der Oeffnung wenigstens halb so groß sey, als die Höhe der Oeffnung.

Nach diesen Voraussetzungen sind 2 Fälle zu unterscheiden.

A.) Ob die innere Fläche der Oeffnung, die zwischen dem inneren und äußeren Rande der Oeffnung liegt, kleiner als die Oeffnungsfläche ist?

B.) Ob besagte Fläche größer als die Oeffnungsfläche ist?

Die Oeffnungsfläche sey $= \alpha$, die Höhe des Wasserspiegels über dem Schwerpunkte einer in die Oeffnung passenden grismatischen Masse $= h$, die in jeder Sekunde ausfliesende Wassermenge $= M$, die Geschwindigkeit beim Ausflusse aus der äußeren Mündung $= c$, der Querschnitt des Strahls am äußeren Rande $= w$, so ist

XXV.

Für den Fall (A)

$$c = 2\sqrt{gh};$$
$$M = 0,62 \, . \, \alpha \, . \, 2\sqrt{gh}$$

Daher

$$w = 0,62 \, . \, \alpha$$

Für den Fall B

$$c = 0,81 \, . \, 2\sqrt{gh}$$
$$M = 0,81 \, . \, \alpha \, . \, 2\sqrt{gh}$$

Daher

$$w = \alpha$$

Die Koefficienten in den verschiedenen Werthen von M, nämlich 0,62 und 0,81 werde ich Verminderungskoefficienten nennen, und in der Folge allemal mit γ bezeichnen.

Anm. Wieviel die Wandfläche zwischen dem inneren und äußeren Rande der Oeffnung kleiner oder größer seyn müsse als die Oeffnungsfläche, um zu dem Falle A

oder zu dem B zu gehören, ist noch nicht gehörig erörtert. Wir wollen gedachte Wandfläche mit ζ bezeichnen, so ist wenigstens soviel gewiß, daß allemal A gilt, wenn ζ nicht größer als $\frac{1}{2}\alpha$ ist, und daß allemal B statt findet, wenn ζ nicht $< 4 . \alpha$ ist. Zwischen $\zeta = \frac{1}{2}\alpha$ und $\zeta = 4\alpha$ ändert sich der Werth des Köefficienten γ von 0,62 bis zu 0,81 in unmerkbaren Stufen. Man muß daher in der Ausübung, um sichere Berechnungen anstellen zu können, darauf bedacht nehmen, daß entweder $\zeta < \frac{1}{2}\alpha$ oder $\zeta > 4\alpha$ werde. *)

Bei Fallschützen fällt die Zusammenziehung des Strahls am Boden weg, überdas trit für die Boden- und Seitenfläche der Fall B ein, daher man auch für den Durchfluß durch Schützenöffnungen genau genug

$$\text{XXVI.} \quad M = 0,8 . \alpha . 2\sqrt{gh}$$

setzen kann, wofern der Bedingung (§. 15. No. 3.) Genüge geschieht.

Fällt der obere Rand der rektangelförmigen Oeffnung in die Oberfläche des Wassers, so bleibt nur noch beiläufig

$$\text{XXVII.} \quad M = 0,8 . \alpha . \sqrt{2gh}$$

Ist die Höhe der Wasserfläche über dem oberen Rande der rektangelförmigen Oeffnung < die halbe Höhe der Oeffnung, so fällt

XXVIII. M zwischen XXIV und XXVII.

Sehr genaue Bestimmungen lassen sich für solche Fälle wie (XXVI = XXVIII) nicht geben.

§. 16.

Ueberschreitet der Werth von ζ (Anm. im vor. §.) den von 4α beträchtlich, so findet der Werth (XXV. Lit. B)

---

*) S. unten das letzte Kapitel dieser Schrift.

von M nicht mehr statt. Die Bestimmung des Werths von M für z. B. $\zeta = 20.\alpha$, $30.\alpha$ und dergleichen geringe Längen ist noch nicht hinlänglich erörtert. Wird aber ζ nur $= 100.\alpha$, so kann man dem wahren Werthe von M schon ziemlich nahe kommen. Kästner und Karsten ertheilen hierüber so wenig als Euler Unterricht, und ich setze daher diese Untersuchungen in die Reihe der neuesten Erweiterungen der Hydraulik. Für die Fälle A und B (§. 15.) hatte man allgemein

$$\text{XXVI. } M = \gamma\alpha . 2\sqrt{gH}$$

Wir setzen daher für Röhrenleitungen, für welche wir nun allgemein $\zeta > 100.\alpha$ annehmen, zuerst

$$\text{XXVII. } M = \gamma\alpha . 2\sqrt{g(K - k)}$$

und nennen die Höhe k, welche von H abgezogen werden muß, um den Werth von M zu erhalten, die Widerstandshöhe, welche hier noch unbekannt ist.

Dabei bezeichnet H die Höhe des Wasserspiegels im Behältnisse über dem Mittelpunkte der Ausflußöffnung am Ende der Röhrenleitung.

Auch setzen wir anfänglich gerade aus gehende Röhrenleitungen von unveränderlicher Weite voraus.

§. 17.

Die mittlere Geschwindigkeit der Wassertheilchen in einer Röhrenleitung ist beim ersten Anlassen desto kleiner, je länger die Röhrenleitung ist; nach und nach nimmt die Geschwindigkeit zu, bis sie sich endlich nicht mehr merklich ändert und als beständig fortdauernd angesehen werden kann. Hierzu kann z. B. $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{2}$ = 1 = 2 = 3 und mehr Sekunden erfordert werden; diese nach dem ersten Anlassen noch verstreichende Beschleunigungszeit wird wegen ihrer Kürze hier ganz bei Seite gesetzt, also der Ausfluß für den Beharrungsstand betrachtet.

Es sey nun die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung $= c$, der Röhrendurchmesser $= d$, die zu d gehörige Kreisfläche oder Röhrenweite $= w$, die zu c gehörige Fallhöhe $= v$, so ist

$$\text{XXVIII.* } M = w \, . \, c = 2 w \sqrt{g v}$$

folglich nach (XXVII*)

$$2 w \sqrt{g v} = 2 \gamma \alpha \sqrt{g (H - k)}$$

und

$$\text{XXIX. } v = \frac{\gamma^2 \alpha^2}{w^2} . (H - k)$$

auch

$$\text{XXX. } k = H - \frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} . v$$

§. 18.

Die Länge der Röhrenleitung sey $= \lambda$; die einer anderen $= \lambda'$, der Durchmesser dieser anderen $= d'$ und die zur Geschwindigkeit c' in dieser Röhrenleitung gehörige Fallhöhe $= v'$. Nun läßt sich für einen angenommenen Fall der Werth von k durch unmittelbare Beobachtungen aus (XXX) finden. Ein so gefundener Werth von k für bestimmte Werthe von d, v und λ heise Z, so ist nunmehr die Frage, wie sich daraus der Werth von k für eine andere Röhrenleitung werde ableiten lassen, der die Bestimmungsgrössen d', v' und λ' zugehören? Dieser Werth von k sey Z'.

Wir nehmen hypothetisch an, es werde wenigstens beiläufig die folgende Proportion statt finden:

$$Z : Z' = \frac{\lambda \, v}{d} : \frac{\lambda' \, v'}{d}$$

also

$$Z' = \frac{\left(\frac{\lambda' \, v'}{d'}\right)}{\left(\frac{\lambda \, v}{d}\right)} Z = \frac{\lambda' \, v'}{d'} \cdot \frac{d}{\lambda \, v} \cdot Z$$

Es ist aber auch (XXX)

$$Z = H - \frac{w^2}{\gamma^2 \, \alpha^2} \cdot v$$

also

$$Z' = \frac{\lambda' \, v'}{d'} \cdot \frac{d \cdot \left(H - \frac{w^2}{\gamma^2 \, \alpha^2} \cdot v\right)}{\lambda \, v}$$

wo die Größe $\frac{d \cdot \left(H - \frac{w^2}{\gamma^2 \, \alpha^2} \cdot v\right)}{\lambda \, v}$ bei dem angestellten Versuche gegeben ist; ihr Werth sey ϕ, so hätte man

$$\text{XXXI.} \quad Z' = \phi \cdot \frac{\lambda' \, v'}{d'}$$

§. 19.

Dübuat, Bossüt und Couplet haben, Jeder für sich, Versuche mit Röhrenleitungen von sehr verschiedenen Abmessungen angestellt, wovon ich hier 51 hersetze. Die Namen der Beobachter sind mit D, B, C angemerkt.

	H	d	λ	c
1. D.	0,15 Zoll	1 Zoll	737 Zoll	1,589 Zoll (Paris.)
2. C.	5,583	5	84240	2,107
3. id.	11,333	5	id.	3,154
4. D.	0,5	1	737	3,623
5. C.	16,75	5	84240	4,127
6. id.	21,083	id.	id.	4,806
7. id.	24,0	id.	id.	5,213
8. id.	25,0	id.	id.	5,323

		H	d	λ	c
9.	D.	0,7 Zoll	1 Zoll	738,5 Zoll	8,689 Zoll (Paris.)
10.	id.	4,2	id.	id.	10,441
11.	id.	id.	id.	id.	10,671
12.	B.	4,0	id.	600	12,223
13.	id.	12,0	1,333	2160	12,562
14.	D.	5,93	1,0	737	13,315
15.	B.	12,0	1,333	1800	14,066
16.	D.	7,78	1,0	737	15,112
17.	B.	12,0	1,333	1440	16,128
18.	D.	8,96	1,0	737	16,284
19.	B.	12,0	2,01	2160	16,377
20.	D.	8,96	1,0	737	16,626
21.	B.	12,0	2,01	1800	18,304
22.	id.	24,0	1,333	2160	18,896
23.	id.	12,0	id.	1080	18,943
24.	D.	12,32	1,0	737	19,991
25.	B.	12,0	2,01	1440	20,707
26.	D.	13,7	1,0	737	20,97
27.	B.	24,0	1,333	1800	21,032
28.	D.	14,6	1,0	737	21,856
29.	B.	12,0	id.	600	22,288
30.	id.	id.	1,333	727	23,360
31.	id.	id.	2,01	1080	23,806
32.	id.	24,0	1,333	1440	24,004
33.	id.	id.	2,01	2160	24,731
34.	id.	id.	id.	1800	27,470
35.	id.	id.	1,333	1080	28,075
36.	D.	23,7	1,0	737	28,669
37.	B.	12,0	2,01	720	29,215
38.	D.	6,0	1,0	138,5	29,341
39.	B.	24,0	2,01	1440	30,896
40.	id.	12,0	1,333	360	33,160

		H	d	λ	c
41.	B.	24,0 Zoll	1,333 Zoll	720 Zoll	34,473 Zoll (Paris.)
42.	id.	id.	2,01	1080	35,765
43.	C.	145,08	18,0	43200	39,159
44.	B.	12,0	2,01	360	40,422
45.	id.	24,0	id.	720	43,000
46.	id.	id.	1,333	360	48,534
47.	D.	18,0	1,0	117	58,310
48.	id.	20,95	id.	138,5	58,808
49.	B.	24,0	2,01	360,0	58,903
50.	D.	26,66	1,0	117,0	79,301
51.	id.	36	id.	id.	84,945.

§. 20.

Hiernach können wir ϕ für 51 Beobachtungen berechnen. Ich habe diese Berechnung vorgenommen. Man erhält bald größere bald kleinere Werthe von ϕ. Nehmen wir nun, um doch beiläufige Resultate zu erhalten, aus allen das arithmetische Mittel, so finden wir

$$\text{XXXII.} \quad \phi = 0{,}025$$

und nun aus (XXXI) für jeden Werth von λ, v und d den zugehörigen Werth von k, nämlich

$$\text{XXXIII.} \quad k = 0{,}025 \cdot \frac{\lambda\ v}{d}$$

Daher aus (XXIX)

$$v = \frac{\gamma^2\ \alpha^2}{w^2} H - 0{,}025 \cdot \frac{\lambda\ v}{d} \cdot \frac{\gamma^2\ \alpha^2}{w^2}$$

oder

$$\left(1 + \frac{0{,}025 \cdot \gamma^2\ \alpha^2\ \lambda}{w^2 \cdot d}\right) \cdot v = \frac{\gamma^2\ \alpha^2\ H}{w^2}$$

Demnach

$$\text{XXXIV.}\left\{\begin{array}{l} v = \dfrac{\gamma^2\ \alpha^2\ H}{w^2 + \dfrac{0{,}025 \cdot \gamma^2\ \alpha^2\ \lambda}{d}} \\ \text{oder auch} \\ v = \dfrac{H}{\dfrac{w^2}{\gamma^2\ \alpha^2} + \dfrac{0{,}025 \cdot \lambda}{d}} \end{array}\right.$$

§. 21.

In Bezug auf $\frac{w^2}{\gamma^2\ \alpha^2}$ bemerken wir noch folgendes. Zur Abhaltung fremdartiger Körper kann vor der Einflußöffnung α ein großer kesselförmiger kupferner Seiher oder ein großer etwas locker geflochtener weidener Korb befestigt werden, der 5 = 6mal soviel Wasser durchlassen könnte, als die Röhrenleitung abfliesen läßt. Dann ist es in Bezug auf den Abfluß so gut, als wäre die Oeffnung α ganz frei, also $\alpha = w$, daher wir diese Voraussetzung auch in der Folge allemal annehmen. Für diesen Fall haben wir aber $\gamma^2 = 0{,}65$ also $\frac{w^2}{\gamma^2\ \alpha^2} = \frac{w^2}{0{,}65 \cdot w^2} = 1{,}538$, und

$$\text{XXXV.}\quad v = \frac{H}{1{,}538 + \dfrac{0{,}025 \cdot \lambda}{d}}$$

Man sieht, daß die Zusammenziehung des Wassers beim Einflusse in die obere Röhrenmündung α bei Röhrenleitungen, die nur 100' lang sind, als Hinderniß der Bewegung nicht mehr in Betrachtung kommen kann, nicht einmal in Bezug auf den Werth von v, noch viel weniger in Bezug auf die Geschwindigkeit des Wassers, nämlich $c = 2\sqrt{gv}$, oder

$$\text{XXXVI.}\quad c = 2\sqrt{\frac{gH}{1{,}538 + \dfrac{0{,}025 \cdot \lambda}{d}}}$$

Auch hat man jetzt

XXXVII.
$$M = 2w \cdot \sqrt{\frac{gH}{\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} + \frac{0,025 \cdot \lambda}{d}}}$$

und, für $\alpha = w$,

$$M = 2w \cdot \sqrt{\frac{gH}{1,538 + \frac{0,025 \cdot \lambda}{d}}}$$

§. 22.

Um den zum Abflusse einer bestimmten Wassermenge in 1 Sekunde erforderlichen Röhrendurchmesser zu finden, schreibt man $0,785 \cdot d^2$ statt w; dieses giebt

$$M^2 = \frac{4 \cdot 785^2 \cdot d^4 \cdot gH \cdot \gamma^2 \alpha^2 d}{0,785^2 \cdot d^5 + 0,025 \cdot \lambda \cdot \gamma^2 \alpha^2}$$

also

XXXIX. $$d = \sqrt[5]{\frac{0,025 \cdot \lambda \cdot \gamma^2 \alpha^2 \cdot M^2}{0,785^2 \cdot (M^2 - 4gH\,\gamma^2 \alpha^2)}}$$

Ist aber λ nur $100' = 1200''$ lang, so ist schon der Ausdruck

$$M = 2w \cdot \sqrt{\frac{gH \cdot d}{0,025 \cdot \lambda}}$$

von dem 2ten in (XXXVII) nicht mehr merklich verschieden, also

$$M^2 = \frac{4 \cdot 0,785^2 \cdot d^4 \cdot gH \cdot d}{0,025 \cdot \lambda}$$

und man erhält hieraus

$$d = \sqrt[5]{\frac{0,025 \cdot \lambda \cdot M^2}{4 \cdot 0,785^2 \cdot gH}}$$

oder

$$d = \sqrt[5]{\frac{0,0101 \cdot M^2 \cdot \lambda}{gH}}$$

oder hier noch genau genug

$$\text{XL.}\quad d = \sqrt[5]{\frac{0{,}01 \,.\, M^2 \,.\, \lambda}{gH}}$$

1. Ex. Die Beobachtung No. 22. (§. 19.) giebt, alles in Zollen, H = 24, $\lambda = 2160$, $d = \frac{4}{3}$, also M = $18{,}9 \times 0{,}785 \,.\, \frac{16}{9} = 26{,}37$ K. Zoll. Nimmt man nun die Werthe von H, λ und M als gegeben an, und sucht d, so findet man

$$\text{XLI.}\quad \log.\, d = \frac{l.\,0{,}01 + 2.\,lM + l\lambda - (lg + lH)}{5}$$

Es ist aber

2 l M	= 2,84222	log. g	= 2,25768
l λ	= 3,33445	l. H	= 1,38021
l 0,01	= 0,00000 — 2		= 3,63789
	= 4,17667		
Abgez. . .	3,63789		
Diff.	= 0,53878		

Also

$$\log.\, d = \frac{0{,}53878}{5} = 0{,}10775$$

Die zugehörige Zahl ist d = 1,28 Zoll. Der wirkliche Durchmesser war aber nach der Beobachtung d = 1,33″.

2. Ex. Die Beobachtung No. 43. giebt H = 145, $\lambda = 43200$, d = 18, also M = 39, 16 . 0,785 . 324 = 9960 Kub. Zoll. Jetzt ist

2. log. M	= 7,99652	log. g	= 2,25768
l. λ	= 4,63548	l. H	= 2,16136
l 0,01	= 0,00000 — 2		= 4,41904
	= 10,63200		
Abgez. . . .	4,41904		
Diff.	= 6,21296		

Also

$$\log. d = \frac{6{,}21296}{5} = 1{,}2426$$

Die zugehörige Zahl ist 17,47″; der wirkliche Durchmesser war nach der Beobachtung d = 18″.

3. Ex. Die Beobachtung No. 39. giebt H = 24, λ = 1440; d = 2,01; also M = 30,9 . 0,785 . 4,04 = 98 Kub. Zoll. Hier ist

2 log. M	= 3,98245	log. g	= 2,25768
1 λ	= 3,15836	l. H	= 1,38021
1 0,01	= 0,00000 − 2		= 3,63789
	= 5,14081		
Abgez. . .	3,63789		
Diff.	= 1,50292		

Also

$$\log. d = \frac{1{,}50292}{5} = 0{,}3006$$

Die zugehörige Zahl ist 1,998″. Der wirkliche Durchmesser war d = 2,01″.

Diese nahen Zusammenstimmungen bestättigen die Brauchbarkeit der obigen Formeln.

In der Ausübung darf man indessen nicht allgemein auf so genaue Zusammenstimmung Rechnung machen. Da überdas mit der Zeit fremdartige Materien sich niederschlagen oder an die inneren Wandflächen ansetzen, so thut man selbst bei reineren Wassern wohl, wenn man den Durchmesser um $\frac{1}{8}$ größer nimmt, als ihn die Rechnung giebt. Bei unreinen Wassern, oder solchen, die nach und nach eine steinige Rinde ansetzen (ich habe dergleichen ringsum angesetzte Rinden zu mehr als 1″ dick angetroffen) muß man nach der besonderen Beschaffenheit der Wasser noch mehr zulegen, desto mehr, je geringer die Geschwindigkeit des durchfliesenden Wassers ist.

Röhrenleitungen von Röhren verschiedener Weite, auch mit engeren Ausflußöffnungen.

§. 23.

Bei der Bewegung des Wassers durch Röhrenleitungen kommen allemal zweierlei Arten des Widerstandes vor, welche die Bewegung verzögern, nämlich

1) die Röhrenwände selbst (mit Inbegriff der Wirkungen, welche die Wassertheilchen gegenseitig auf einander ausüben)

2) die dabei vorkommenden Verengungen.

Im vorigen Absatze kam nur eine Verengung vor, die in der Einflußöffnung α. Es können aber Röhrenstrecken von verschiedenen Weiten vorkommen, und man kann sich hierzu leicht eine Zeichnung entwerfen.

Es sey nun die Weite der ersten unmittelbar vom Behältnisse ausgehenden Röhrenstrecke . . . = w
Ihre Länge . . . . = λ
Der zu w gehörige Durchmesser . . . . . . = d
Die Weite der 2ten Röhrenstrecke . . . . . . = w'
Der zugehörige Durchmesser . . . . = d'
Ihre Länge . . . . = λ'

So für die folgenden Röhrenstrecken w'', d'', λ''; w''', d''', λ''' etc. Auch sey nur noch von geraden Röhrenleitungen die Rede.

Die Widerstände der erstern Art sehen wir als entgegendruckende Wassersäulen von den Höhen k, k', k' etc. an, und die der letzteren als entgegendruckende Wassersäulen von den Höhen f, f', f'' ꝛc.

§. 24.

Jede folgende Röhrenstrecke verursacht an ihrer Einflußmündung eine doppelte Verengung: 1) wegen der kleineren

Röhrenmündung selbst; 2) wegen der hiermit zugleich verbundenen Zusammenziehung des Wassers beim Eintritt in die Oeffnung.

Hier kommt es nun wieder darauf an, wie man γ in solchen Fällen anzunehmen habe, wo die Bedingung §. 15. No. 2. nicht statt hat? bis genauere Versuche hierüber entschieden haben, müssen wir eine Hypothese zum Grunde legen. Wir bezeichnen zu dem Ende

Die Länge der nten Röhrenstrecke nach der ersten mit $\lambda(n)$
Ihre Weite mit . . . . $w(n)$
Ihren Durchmesser mit . . . . $d(n)$

Ebenso gelten $\lambda(n+1)$, $w(n+1)$, $d(n+1)$;
$\lambda(n+2)$, $w(n+2)$, $d(n+2)$
etc.
als Bezeichnungen für die n + 1te, n + 2te etc. Röhrenstrecke nach der 1ten.

Und nun setzen wir für die Einflußöffnung jeder n + 1ten Röhrenstrecke nach der 1ten.

$$\gamma = 1 - \left(1 - \left(\frac{w(n+1)}{w(n)}\right)^2\right) 0{,}19$$

oder

$$\text{XLII.}\quad \gamma = 0{,}81 + \left(\frac{w(n+1)}{w(n)}\right)^2 \cdot 0{,}19$$

Auf gleiche Weise haben wir für Oeffnungen in dünnen Wänden.

$$\text{XLIII.}\quad \gamma = 0{,}62 + \left(\frac{\beta}{w(n)}\right)^2 \cdot 0{,}38$$

wenn vor der Mündung der Röhrenleitung $\lambda(n+1)$ eine dünne Platte mit der Oeffnung β vorgeschlagen ist.

Es sey z. B. die Röhrenstrecke gleich nach der ersten 3″ im Durchmesser, die erste am Behältnisse 5″ im Durchschnitt weit, (wo also 0 Striche statt n, und 1 Strich statt n + 1 gesetzt werden müßten), so wird hiernach

$$\gamma = 0{,}81 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 \cdot 0{,}19 = 0{,}878$$

§. 35.

Ist die zur Geschwindigkeit c gehörige Fallhöhe in der Röhre λ (d. h. deren Länge $= \lambda$ ist) $=$ v, so ist die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenstrecke $\lambda(n) = \frac{w}{w(n)} \cdot c$, also die zugehörige Fallhöhe nach (IV) $=$

$$\frac{\left(\frac{w}{w(n)} \cdot c\right)^2}{4g} = \left(\frac{w}{w(n)}\right)^2 \cdot \frac{c^2}{4g} = \left(\frac{w}{w(n)}\right)^2 \cdot v.$$

Ebenso die Höhe, welche zur Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre $\lambda(n+1)$ gehört $= \left(\frac{w}{w(n+1)}\right)^2 \cdot v$ u. s. w.

Hingegen die Höhe, welche zur Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt aus der Röhre $\lambda(n)$ in die Röhre $\lambda(n+1)$ gehört, $= \left(\frac{w}{\gamma \cdot w(n+1)}\right)^2 \cdot v$.

Da aber die Wassertheilchen in der Röhrenstrecke $\lambda(n)$ mit der Geschwindigkeit $\frac{w}{w(n)} \cdot c$ fortfliesen, und mit dieser an der Mündung der Röhrenstrecke $\lambda(n+1)$ ankommen, so müßte, wofern an dieser Stelle die Wassertheilchen mit der Geschwindigkeit $\frac{w}{\gamma \cdot w(n+1)} \cdot c$ in die Oeffnung $w(n+1)$ eintreten soll, der die Höhe $\left(\frac{w}{\gamma \cdot w(n+1)}\right)^2 \cdot v$ zugehört, noch eine neue Geschwindigkeitshöhe hinzukommen; bezeichnen wir diese mit $x(n)$, so muß

$$\left(\frac{w}{w(n)}\right)^2 \cdot v + x(n) = \left(\frac{w}{\gamma \cdot w(n+1)}\right)^2 \cdot v$$

seyn, also

$$\text{XLIV. } x(n) = \left(\left(\frac{w}{\gamma \cdot w(n+1)}\right)^2 = \left(\frac{w}{w(n)}\right)^2\right) \cdot v$$

Dieses gilt für jede Verengung, so daß zur Beseitigung der bei jeder solcher Verengung vorkommenden Geschwindigkeitsverminderung eine neue Geschwindigkeitshöhe hinzukommen muß, nämlich

$$\text{am Ende von } \lambda^{\circ} \text{ die Geschw.-Höhe } x^{\circ} = \left(\left(\frac{w}{\gamma w'}\right)^2 - \left(\frac{w}{w}\right)^2\right) \cdot v$$

$$\text{von } \lambda' \quad - \quad - \quad x' = \left(\left(\frac{w}{\gamma w''}\right)^2 - \left(\frac{w}{w'}\right)^2\right) \cdot v$$

$$\text{von } \lambda'' \quad - \quad - \quad x'' = \left(\left(\frac{w}{\gamma w'''}\right)^2 - \left(\frac{w}{w''}\right)^2\right) \cdot v$$

etc. etc.

Nach ebendiesem Gesetze müßte vor der ersten Einflußöffnung α die Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{\gamma^2 \alpha^2} \cdot v - v$ oder $\frac{w^2 - \gamma^2 \alpha^2}{\gamma^2 \alpha^2} \cdot v$ noch hinzukommen, um die durch die Verengung in α entstehende Geschwindigkeitsverminderung zu beseitigen.

§. 26.

Es müßte also, um für die vom Behältnisse ausgehende Röhrenleitung λ° (die wir auch schlechthin mit λ bezeichnen) die zur Höhe v gehörige Geschwindigkeit zu bewirken, wegen der Verengungen am Anfange von λ, λ', λ'' etc. überhaupt die Summe von Geschwindigkeitshöhen

$$\text{XLV. } \left(\frac{w^2 - \gamma^2 \alpha^2}{\gamma^2 \alpha^2} + \left(\left(\frac{w}{\gamma w'}\right)^2 - \left(\frac{w}{w}\right)^2\right)\right.$$
$$+ \left(\left(\frac{w}{\gamma w''}\right)^2 - \left(\frac{w}{w'}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{w}{\gamma w'''}\right)^2 - \left(\frac{w}{\gamma w''}\right)^2\right)$$
$$\left. \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \left(\left(\frac{w}{\gamma w(n)}\right)^2 - \left(\frac{w}{\gamma w(n-1)}\right)^2\right)\right) \cdot v$$

noch hinzukommen.

Dabei steht n statt einer Anzahl von n Strichen, und n ist die Anzahl von Röhrenstrecken, welche nach der ersten folgen; w ist die Weite (die Flächengröße) der ersten Röhrenstrecke, deren Länge λ ist, $w^{(n)}$ die Weite der nten Röhrenstrecke nach der ersten; α die Größe der Einflußmündung am Anfange der ersten Röhrenstrecke, und γ die nach XLII bestimmte Zahl.

Wäre vor der Einflußöffnung w eine dünne Platte mit der Oeffnung α vorgeschlagen, so hätte man $\gamma \alpha = 0,62 . \alpha$ Wäre aber in irgend einer Röhrenleitung $\lambda^{(n)}$ eine dünne Schiedwand mit einer Oeffnung β angebracht, so wäre für diese Oeffnung $\gamma = 0,62 + \left(\frac{\beta}{w^{(n)}}\right)^2 . 0,38$ (nach XLIII).

Auch wäre in diesem Falle $w^{(n)} = w^{(n+1)}$.

S. unten das 15te Kapitel.

§. 27.

Bisher war nur von der Geschwindigkeitsänderung die Rede, welche aus den Verengungen entstehen. Hierzu kommen nun noch die in den Röhren selbst eintretenden Geschwindigkeitsverminderungen. Nach oben schon vorgekommenen Untersuchungen gehört aber zur Beseitigung dieser Verminderungen in Bezug auf die Strecke

λ eine Geschwindigkeitshöhe $\frac{0,025 . \lambda}{d} . v$

λ' . . . . $\frac{0,025 . \lambda'}{d'} . \left(\frac{w}{w'}\right)^2 . v$

λ'' . . . . $\frac{0,025 . \lambda''}{d''} . \left(\frac{w}{w''}\right)^2 . v$

etc.

wofern die Geschwindigkeitshöhe für die erste Röhrenstrecke $\lambda = v$ bleiben soll.

§. 28.

Zur Abkürzung sey nun

$$\text{XLVI.}\quad \frac{w^2 - \gamma^2\,\alpha^2}{\gamma^2\,\alpha^2} + \left(\left(\frac{w}{\gamma w'}\right)^2 - \left(\frac{w}{w}\right)^2\right)$$

$$+ \left(\left(\frac{w}{\gamma w''}\right)^2 - \left(\frac{w}{w'}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{w}{\gamma w'''}\right) - \left(\frac{w}{w''}\right)^2\right)$$

$$\ldots\ldots + \left(\left(\frac{w}{\gamma\, w^{(n)}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w^{(n-1)}}\right)^2\right)$$

und $= \mathfrak{B}$

$$\text{XLVII.}\quad 0{,}025 \cdot \left(\frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda'}{d'} \cdot \left(\frac{w}{w'}\right)^2 + \frac{\lambda''}{d''} \cdot \left(\frac{w}{w''}\right)^2\right.$$

$$\left.\ldots\ldots + \frac{\lambda^{(n)}}{d^{(n)}} \cdot \left(\frac{w}{w^{(n)}}\right)^2\right)$$

$$= \mathfrak{A}$$

wo sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jedesmal leicht berechnen lassen, so hat man nunmehr

$$\text{XLVIII.}\quad v = H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \,.\, v$$

wo $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \,.\, v$ die gesammte Widerstandshöhe ausmacht, so daß der Nachtheil von der Verengung bei α schon mit darunter begriffen ist. Man hat also nunmehr

$$\text{XLIX.}\quad v = \frac{H}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$$

$$\text{L.}\quad c = 2\sqrt{\frac{gH}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}}}$$

$$\text{LI.}\quad M = 2w \,.\, \sqrt{\frac{gH}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}}}$$

c und v beziehen sich nämlich allemal auf die Röhrenstrecke, deren Länge λ und Weite w ist.

Für Röhren von gleicher Weite w wird, wenn überdas $\alpha = w$ ist,

LII.

$$\mathfrak{A} = \frac{0{,}025 \, . \, \lambda}{d};$$

$$\mathfrak{B} = \frac{w^2 - \gamma^2 \alpha^2}{\gamma^2 \alpha^2} = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} = \frac{1 - 0{,}65}{0{,}65} = 0{,}538,$$

$$v = \frac{H}{1 + \frac{0{,}025 \, . \, \lambda}{d} + 0{,}538}$$

$$c = 2\sqrt{\frac{gH}{1{,}538 + \frac{0{,}025 \, . \, \lambda}{d}}}$$

also in Pariser Zollen

$$c = \sqrt{.\frac{470 \, . \, H}{1 + 0{,}0162 \, . \, \frac{\lambda}{d}}}$$

Die Reduktion auf Fusse giebt

$$c = \sqrt{\frac{470 \, . \, H}{12 + 0{,}1944 \, . \, \frac{\lambda}{d}}}$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{2416 \, . \, d \, . \, H}{61{,}5 \, . \, d + \lambda}}$$

und gleichfalls in Par. Fussen

$$v = \frac{c^2}{60{,}4}$$

oder

$$v = \frac{40 \, . \, d \, . \, H}{61{,}5 \, . \, d + \lambda}$$

Setzt man $\lambda = 0$ so daß nur, um die Natur der Röhre beizubehalten, eine dikke Wand übrig bleibe, so wird hiernach $c = \sqrt{39{,}3 \, H} = 0{,}81 \, . \, 2\sqrt{gH}$ wie sich nach XXV gehört.

Ex. Bei dem Versuch §. 19. No. 25. war H = 12″, λ = 1440″, d = 2,01″; dieses giebt in Zollen

$$= \sqrt{\frac{470 \cdot 12}{1 + 0{,}0162 \cdot \frac{144000}{201}}} = \sqrt{\frac{5640}{1 + 11{,}6}} = 21{,}156$$

Die wirkliche Beobachtung gab in derselben Tafel 20,707″.

Anm. Das weit umständlichere Verfahren von Dübuat giebt c = 20,076″. Die Pronysche Formel fehlt um $\frac{1}{36}$ der wahren Geschwindigkeit; die unsrige nur um $\frac{1}{46}$. Freilich findet eine so genaue Uebereinstimmung mit der Erfahrung nicht in allen Fällen statt.

§. 29.

Die Weite der letzten Röhrenstrecke sey = ζ; wäre nun an der Ausflußmündung eine Platte mit der Oeffnung ν angebracht, so dürfte man nur diese Platte als die nte Röhre nach der 1ten λ betrachten; jetzt wäre das letzte Glied im Werthe von $B = \left(\left(\frac{w}{\nu}\right)^2 - \left(\frac{w}{\zeta}\right)^2\right)$. Im Werthe von A wäre das letzte Glied $\frac{\lambda^{(n)}}{d^{(n)}} \cdot \left(\frac{w}{w^{(n)}}\right)^2 = 0$, weil die Platte als eine Röhre von der Länge $\lambda^{(n)} = 0$ angesehen werden könnte.

§. 30.

Bisher wurde ein solches Aufeinanderfolgen der verschiedenen Röhrenstrecken vorausgesetzt, wobei an den Stellen der Zusammensetzung jedesmal eine Verengung erfolgt, die dann nothwendig der Bewegung nachtheilig seyn mußte.

Es könnte aber auch eine Röhrenstrecke $\lambda^{(n)}$ weiter seyn als die in sie eingreifende $\lambda^{(n-1)}$.

Wäre z. B. $w''' > w''$, so käme das Wasser aus der engeren λ'' in die weitere λ''' ohne Zusammenziehung, und es wäre jetzt $\gamma w''' = w''$ und $\left(\frac{w}{\gamma w'''}\right)^2 - \left(\frac{w}{w''}\right)^2$ sogar verneint, welches seine richtige physische Bedeutung hat. Jetzt entsteht nämlich der Differenz der Geschwindigkeiten gemäß ein Druck des Wassers in λ'' gegen das in λ''', weil letzteres langsamer fließt; und so wird also jetzt Kraft für das Wasser in λ''' gewonnen.

Indem aber das Wasser aus den Röhren λ''' wieder in eine engere λ^{IV} trift, deren Weite $w^{IV} < w'''$ ist, kommt eine von neuem erforderliche Druckhöhe $\left(\left(\frac{w}{\gamma w^{IV}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w'}\right)^2\right) \cdot v$ hinzu; und es wird also wegen der Röhren λ''' und λ^{IV} zusammengenommen noch die Geschwindigkeitshöhe

$$\left[\left(\left(\frac{w}{w'''}\right)^2 - \left(\frac{w}{w''}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{w}{\gamma w^{IV}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w'''}\right)^2\right)\right] \cdot v$$

$$= \left(\left(\frac{w}{\gamma w^{IV}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w''}\right)^2\right) \cdot v$$

erfordert, um für die Röhre λ die der Geschwindigkeit c zugehörige Höhe v beizubehalten.

Wäre aber auch $w^{IV} > w'''$, daß also auch γw^{IV} schlechthin $= w^{IV}$ würde, so wäre die weiter erforderliche Geschwindigkeitshöhe

$$\left(\left(\frac{w}{w^{IV}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w''}\right)^2\right) \cdot v$$

Trit nun das Wasser in die Röhre λ^{V}, deren Weite $w^{V} < w^{IV}$ wäre, so würde zur Beibehaltung der Geschwindigkeit c aufs Neue eine Geschwindigkeitshöhe

$$= \left(\left(\frac{w}{\gamma w^{V}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w^{IV}}\right)^2\right) \cdot v$$

erfordert, also wegen der Röhren λ''', λ^{IV} und λ^{V} zusammengenommen die weiter erforderliche Geschwindigkeitshöhe

$$\left[\left(\left(\frac{w}{w^{IV}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w''}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{w}{\gamma w^{V}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w^{IV}}\right)^2\right)\right] \cdot v$$

$$= \left(\left(\frac{w}{\gamma w^{V}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w''}\right)^2\right) \cdot v$$

u. s. f. so daß der Erfolg derselbe ist, als wären die weiteren Röhren w''' und w^{IV} gar nicht vorhanden, und die Röhrenstrecke λ'' unmittelbar mit der λ^{V} verbunden, so daß die Zwischenstecken aus der Rechnung wegfallen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Weite w^{V} wieder $< w''$ sey, so daß $\left(\left(\frac{w}{\gamma w^{V}}\right) - \left(\frac{w}{w''}\right)^2\right) \cdot v$ wieder bejaht wird.

Wäre λ^{V} die letzte Röhrenstrecke, und γw^{V} wieder $> w''$, so daß $\left(\frac{w}{\gamma w^{V}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w''}\right)^2$ wieder verneint würde, so fiele auch dieses Glied in der Rechnung weg. Nach der Röhre λ'' kommt in Bezug auf Verengungen keine wieder in Betrachtung, als eine solche, deren Einflußöffnung $< w''$ wäre; in gedachtem Falle wäre also schlechthin

$$\mathfrak{B} = \frac{w^2 - \gamma^2 \alpha^2}{\gamma^2 \alpha^2} + \left(\left(\frac{w}{\gamma w'}\right)^2 - \left(\frac{w}{w}\right)^2\right)$$
$$+ \left(\left(\frac{w}{\gamma w''}\right)^2 - \frac{w}{w'}\right)$$

§. 31.

Die Formeln XLIX, L und LI behalten auch bei gerade ausgehenden Röhrenleitungen, bei welchen in einzelnen

Röhren durchlochte Schiedewände vorkommen, ihre volle Anwendung, indem man die durchlochte Platten als besondere Röhren betrachtet, deren Länge = 0 wäre. Hätte man z. B. eine 1000′ lange Röhrenleitung zu 12 Quadratzoll weit, und wären in solcher zwei durchlochte Platten mit Oeffnungen zu 2 und 3 Quadratzoll weit angebracht, so daß die 2 zöllige 160′ weit, und die 3 zöllige 450′ von der Einflußöffnung α entfernt wäre, so betrachtet man diese Röhrenleitung so, als wäre sie aus 5 Röhrenstrecken von den folgenden Längen zusammengesetzt:

$$\lambda = 160', \lambda' = 0, \lambda'' = 450 - 160 = 290';$$
$$\lambda''' = 0, \lambda^{IV} = 1000 - 450 = 550';$$

Auch wäre in Quadratzollen

$$w = 12; w' = 2; w'' = 12; w''' = 3; w^{IV} = 12.$$

Dieser Fall kann bei Maschinen vorkommen.

Röhrenleitungen mit plötzlichen Wendungen.

§. 32.

Die bisherigen Untersuchungen, welche auf die Gleichung XLIX geleitet haben, beziehen sich eigentlich nur auf Röhrenleitungen, bei welchen keine plötzliche Wendungen vorkommen, die man auch nach Möglichkeit zu vermeiden suchen muß. Plötzliche Wendungen haben allemal Geschwindigkeitsverlust zur Folge, der in manchen Fällen unbedeutend seyn kann. Um solches nun näher beurtheilen zu können, fügen wir noch einige Sätze bei.

§. 33.

Man denke sich zwei Röhrenstrecken so zusammenlaufend, daß der äußere Winkel, den ihre Richtungslinien bilden, = β wird; die Geschwindigkeit, mit der das Wasser

die Wendungsstelle, erreicht sey $= c$, so setzen wir den erlittenen Geschwindigkeitsverlust $= (1 - \text{Cos.}\ \beta).\ c = c.$ Sinv. β; und die verlohrne Geschwindigkeitshöhe $= \frac{c^2.\ \text{Sinv.}\ \beta^2}{4g}$ $= v.\ \text{Sinv.}\ \beta^2$. Demnach aus (XLVIII) mit Rücksicht auf diesen Verlust

$$\text{LIII.}\quad v = H - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \text{Sinv.}\ \beta^2).\ v$$

und hieraus

$$\text{LIV.}\quad v = \frac{H}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \text{Sinv.}\ \beta^2.}$$

Kommen mehrere solche Wendungen nach einander vor, welche die äußeren Winkel β, β', β'', etc. bilden, so hat man

$$\text{LV.}\ v = \frac{H}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + (\text{Sinv.}\beta)^2 + \text{Sinv.}\beta')^2 + \text{Sinv.}\beta'')^2 + \text{etc.}}$$

Für eine übrigens gleichweite Röhrenleitung, bei der auch noch $\alpha = w$ wäre, hätte man (LII)

$$\text{LVI.}\ v = \frac{H}{1{,}538 + \frac{0{,}025.\ \lambda}{d} + (\text{Sinv.}\ \beta)^2 + (\text{Sinv.}\beta')^2 + \text{etc.}}$$

also in Pariser Zollen, für $g = 181$,

$$\text{LVII.}\ c = \sqrt{\frac{470.\ H}{1 + 0{,}0162.\frac{\lambda}{d} + 0{,}65.\left((\text{Sinv.}\beta)^2 + (\text{Sinv.}\beta')^2 + \text{etc.}\right)}}$$

woraus man schon beim ersten Anblick ersieht, daß bei Röhrenleitungen, die nur mehrere hundert Fuße lang sind, zwei-drei Wendungen nicht sehr schädlich werden.

Es wird z. B. erst Sinv. $41^\circ\ 25' = 0{,}25$; also (Sinv. $41^\circ\ 25')^2 = \frac{1}{16}$. Kämen also bei einer etwas langen Röhrenleitung auch 30 so starke Wendungen vor, so wäre doch $0{,}65.\ 30.\ \frac{1}{16}$ kaum $= 1{,}219$. Wäre nun bei einer

solchen Röhrenleitung $\frac{\lambda}{d}$ auch nur = 2000, so wäre doch schon $0,0162 . \frac{\lambda}{d} = 32,4$; also

$$c = \sqrt{\frac{470 . H}{1 + 32,4 + 1,219}}$$

welches von $c = \sqrt{\frac{470 . H}{1 + 32,4}}$ für die Ausübung kaum merkbar verschieden wäre.

§. 34.

Es kommt aber bei solchen Röhrenwendungen noch ein anderer Umstand in Betrachtung, welcher bedeutender werden könnte, nämlich Verengung oder Zusammenziehung des Wassers an solchen Wendungsstellen. Diese Wirkung läßt sich mit keiner Genauigkeit angeben. Wir dürfen uns indessen bei allen solchen physisch-mathematischen Untersuchungen durch die Unmöglichkeit einer scharfen Theorie nicht von der Bemühung abhalten lassen, für den Einfluß, welchen einzelne Bestimmungsstücke auf das Resultat haben, Bestimmungen aufzusuchen, welche sich wenigstens nicht sehr von der Wahrheit entfernen können. Wir setzen zu dem Ende, für $\beta = 90°$, $\gamma = 0,9$; wir sehen nämlich diesen Fall so an, als stände er zwischen jenen beiden Fällen, wo eine Röhre an ein weites Behältniß angesetzt und wo eine Röhre an eine andere von gleicher Weite in einerlei Richtung mit derselben angestoßen würde, beiläufig in der Mitte, so daß γ beiläufig in die Mitte zwischen 0,81 und 1 fiele. Dabei setzen wir nun den Verlust, welcher hiernach, für $\beta = 90°$, $= 0,1$ wäre, dem Werthe von β proportional, und nehmen daher allgemein $\gamma = 1 - \frac{\beta}{90} . 0,1 = 1 - \frac{\beta}{900}$, bis genauere Beobachtungen hierüber nähere Belehrung geben.

Bezeichnen wir nun die Weiten solcher Röhren, aus welcher das Wasser in eine andere d. h. in die unter einem gewissen Winkel angestossene einfließt, so wie sie nach einander folgen, mit w, w′, w″ ꝛc. so kommt wegen solcher Wendungen nunmehr noch die Widerstandshöhe hinzu

$$\text{LVIII.}\ \left(\left(\left(\frac{w}{g\,w'}\right)^2-\left(\frac{w}{w}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{w}{g\,w''}\right)^2-\left(\frac{w}{w'}\right)^2\right)\right.$$
$$\left.+\left(\left(\frac{w}{g\,w'''}\right)^2-\left(\frac{w}{w''}\right)^2\right)+\text{etc.}\right).\,v$$

wo dann allemal w mit unserem w einerlei ist. Hat die Röhrenleitung nur eine Wendung, so bleibt blos $\left(\left(\frac{w}{g\,.\,w'}\right)^2 - \left(\frac{w}{w}\right)^2\right).\,v$; für zwei Wendungen

$$\left(\left(\left(\frac{w}{g\,.\,w'}\right)^2-\left(\frac{w}{w}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{w}{g\,w''}\right)^2-\left(\frac{w}{w'}\right)^2\right)\right).\,v$$

Für m Wendungen ist das letzte Glied der eingeschlossenen Reihe allemal $\left(\left(\frac{w}{g\,w(m)}\right)^2 - \left(\frac{w}{w(m-1)}\right)^2\right)$.

Bezeichnen wir den kten äußeren Wendungswinkel in Graden mit $\beta(k)$, so ist $g\,.\,w(k) = \left(1 - \frac{\beta(k)}{900}\right).\,w(k)$. Wir haben nämlich zur Unterscheidung von γ hier g gesetzt.

Bezeichnen wir nun die in (LVIII) mit v multiplicirte Größe mit $\mathfrak{C}$, so haben wir

$$\text{LIX.}\ v = \frac{H}{1+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+(\text{Sinv.}\,\beta)^2+(\text{Sinv.}\,\beta')^2+\text{etc.}}$$

Röhren- und Springbrunnen.

§. 35.

Da die Lehre von der Röhren- und Springbrunnen mit der von der Röhrenleitungen genau zusammenhängt, so bleibt Karstens hierher gehöriger Vortrag für die Ausübung ganz unbrauchbar. Selbst Dübüat, welcher die Erfolge bei Röhrenleitungen zuerst näher untersuchte, hat in Bezug auf diese Lehre ganz unrichtige Sätze zum Grunde gelegt.

Man verzeichne sich folgende Figur:

Ein Behältniß, bezeichnet mit A

Eine aus einer Seitenwand dieses Behältnisses abgeleitete Röhrenleitung, bezeichnet mit λ.

Die Oberfläche des Wassers im Behältnisse bezeichnet mit a

Das Endstück der Röhrenleitung an der Mündung bezeichnet mit μ; die Einflußmündung mit α.

Dieses Endstück oder seine Mündung eingreifend in ein 3 = 4 = 6 Fuß langes Röhrenstück, dessen anderes Ende zugespundet, und dessen Durchmesser etwa noch einmal so groß ist, als der durchaus gleichgroße Durchmesser der Röhrenleitung.

Ein in dieses horizontale Röhrenstück eingesetzter lothrechter Röhrenstock, etwa so weit als die Röhrenleitung, nach Beschaffenheit der Umstände 3 = 4 = 6 = 8 Fuß hoch, bezeichnet mit B. Dieser oben verschlossen.

Die höchste Stelle des holen Röhrenstocks d. h. des darin stehenden Wassers bezeichnet mit s.

In willkührlicher Tiefe unterhalb s eine eingesteckte Ausflußröhre; ihre Einflußmündung bezeichnet mit m, ihre Ausflußmündung mit ε.

Eine von a aus über den Röhrenstock gezogene horizontale Linie, und eine von s aus aufwärts gezogene lothrechte Linie. Die Stelle, in der beide Linien einander durchschneiden, bezeichnet mit b. Ein Punkt unterhalb in b s bezeichnet mit t.

Es sey nun wie bisher die Länge der Röhrenleitung $= \lambda$; ihre Weite durchaus $= w = \alpha$; die Weite des Röhrchens m s $= \varepsilon$; die zu w und ε gehörigen Durchmesser $= d$ und d'; die Länge des Röhrchens m s $= \lambda'$; die Wasserhöhe b m $=$ H.

Wenn nun λ, λ', ε und H gegeben sind: wie groß muß w genommen werden, um in jeder Sekunde eine verlangte Ausflußmenge M aus diesem Röhrenbrunnen zu erhalten?

Aufl. Es kommen hier nur die Röhrenweiten w und ε in Betrachtung, und wir haben

$$\mathfrak{A} = 0{,}025 \cdot \left(\frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda'}{d'} \cdot \left(\frac{w}{\varepsilon}\right)^2\right)$$

$$\mathfrak{B} = \frac{w^2 - \gamma^2 w^2}{\gamma^2 w^2} + \frac{w^2}{\gamma^2 \varepsilon^2} - \frac{w^2}{w^2}$$

$$= 0{,}538 + 1{,}538 \cdot \frac{w^2}{\varepsilon^2} - 1$$

$$= 1{,}538 \cdot \frac{w^2}{\varepsilon^2} - 0{,}462$$

also, indem wir keinen merklichen Widerstand wegen Wendungen annehmen,

$$\text{LX. } v = \frac{H}{1 + 0{,}025 \cdot \left(\frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda'}{d'} \cdot \left(\frac{w}{\varepsilon}\right)^2\right) + 1{,}538 \cdot \frac{w^2}{\varepsilon^2} - 0{,}462}$$

und nun

$$M = w \cdot \sqrt{4gv}$$

also

$$\text{LXI. } M^2 = \frac{4gw^2H}{0{,}538 + 0{,}025 \cdot \left(\frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda'}{d'} \cdot \left(\frac{w}{\varepsilon}\right)^2\right) + 1{,}538 \cdot \frac{w^2}{\varepsilon^2}}$$

Setzt man nun $0{,}785^2 \cdot d^4$ statt w^2, und $\frac{d^4}{(d')^4}$ statt $\frac{w^2}{\varepsilon^2}$, und multiplicirt dann im Zähler und Nenner des so herauskommenden Werthes von d^5 mit $\frac{40}{M^2}$, so wird

$$d^5 = \frac{\lambda + 21{,}52 \cdot d}{98{,}6 \cdot \frac{gH}{M^2} - \frac{61{,}52 \cdot d' + \lambda'}{(d')^5}}$$

und

$$\text{LXII. } d = \sqrt[5]{\frac{\lambda + 21{,}52 \cdot d}{98{,}6 \cdot \frac{gH}{M^2} - \frac{61{,}52 \cdot d' + \lambda'}{(d')^5}}}$$

Weil aber λ gewöhnlich vielmal größer als $21{,}52 \cdot d$ ist, so kann man statt der vorstehenden Gleichung auch die folgende setzen:

$$\text{LXIII. } d = \sqrt[5]{\frac{\lambda}{98{,}6 \cdot \frac{gH}{M^2} - \frac{61{,}52 \cdot d' + \lambda'}{(d')^5}}}$$

Wäre auch λ nur doppelt so groß als $21{,}52 \cdot d$, so wäre doch schon $\sqrt[5]{\lambda}$ nicht mehr merklich von der $\sqrt[5]{(\lambda + 21{,}52 \cdot d)}$ verschieden; es ist daher LXIII für alle Fälle der Ausübung hinlänglich.

§. 36.

Denkt man sich in der zuletzt verzeichneten Figur die Ausflußöffnung ε nicht zur Seite, sondern im Kopf des

Springstocks bei s angebracht, so verwandelt sich der Röhrenbrunnen in einen Springbrunnen, so daß der Strahl lothrecht aufsteigt.

In diesem Falle ist nur bei s entweder eine durchlochte dünne Platte angebracht, oder ein kurzes Sprungrohr. Unter der vorigen Voraussetzung, daß das unterste horizontale Röhrenstück nebst dem eingesetzten Springstock weit genug gemacht wird, hat man nur, indem man $\frac{\lambda'}{d'}$ als unbedeutend bei Seite setzt, und $\alpha = w$ nimmt,

$$\mathfrak{A} = 0{,}025 \cdot \frac{\lambda}{d}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{w^2 - \gamma^2 w^2}{\gamma^2 w^2} + \left(\frac{w^2}{\gamma^2 \varepsilon^2} - \frac{w^2}{w^2}\right)$$

also, indem man die Höhe bs = H setzt, für das Wasser in der Röhrenleitung

$$v = \frac{H}{1 + 0{,}025 \cdot \frac{\lambda}{d} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{w^2}{\gamma^2 \varepsilon^2} - 2}$$

oder

$$\text{LXIV. } v = \frac{H}{0{,}025 \cdot \frac{\lambda}{d} + \frac{w^2 + \varepsilon^2}{\gamma^2 \varepsilon^2} - 1}$$

Ist also ε die Oeffnung in einer dünnen Platte und ist v' die zur Geschwindigkeit des Wassers in dieser Oeffnung gehörige Höhe, so hat man

$$\text{LXV. } v' = \frac{w^2}{\gamma^2 \varepsilon^2} \cdot v = \frac{H}{\frac{\gamma^2 \varepsilon^2}{w^2} \cdot \left(0{,}025 \cdot \frac{\lambda}{d} + \frac{w^2 + \varepsilon^2}{\gamma^2 \varepsilon^2} - 1\right)}$$

Dabei ist $\gamma = 0{,}62$ und genau genug $\gamma^2 = 0{,}38$.

Ist aber ε Oeffnung in einer cylindrischen Aufsatzröhre, so hat man für die Bewegung des Wassers in diesem Sprungrohre.

$$\text{LXVI.}\ v' = \frac{H}{\frac{\varepsilon^2}{w^2}\cdot\left(0{,}025\cdot\frac{\lambda}{d}+\frac{w^2+\varepsilon^2}{\gamma^2\,\varepsilon^2}-1\right)}$$

Dabei ist $\gamma^2 = 0{,}63$.

§. 37.

Bezeichnen wir die Höhe, welche der lothrecht springende Strahl von s an aufwärts erreicht, mit h, so lehrt die Erfahrung, daß allemal $h < v'$ ist. Er erreicht (in der verzeichneten Figur eine Höhe st, welche $< sb$ ist, selbst unter den vortheilhaftesten Umständen. Ist nämlich $\alpha = w$, ε sehr vielmal $< w$, und die Sprungöffnung in einer dünnen Platte so angebracht, daß eine aus ihrer Mitte aufgerichtete lothrechte Linie nur sehr wenig, etwa nur einige Fuße weit von der durch α gezogenen lothrechten Linie entfernt ist, so ist selbst in diesem Falle die Strahlhöhe st oder h nicht nur $<$ sb oder H, sondern auch $<$ als der Werth von v' (LXV), der in diesem Falle $= \frac{H}{1+0{,}025\cdot\frac{\lambda\gamma^2\varepsilon^2}{d\,w^2}}$ also freilich sehr nahe $= H$ gesetzt werden kann.

In diesem vortheilhaftesten Falle erreicht nach Mariotte der Strahl die Höhe von $n\,.\,5$ Fuß nur dann, wann $H = n\,.\,5 + n^2\,.\,\frac{1}{12}$ genommen wird. Setzt man also $n\,.\,5' = h$ und daher $n = \frac{h}{5}$, so erreicht der Strahl, der nach der Theorie frei aufgeworfener Körper die Höhe $h + \frac{h^2}{25}\cdot\frac{1}{12}$ oder $h + \frac{h^2}{300}$ erreichen sollte, nur die Höhe h, und das Stück $\frac{h^2}{300}$ geht durch Nebenhindernisse verlohren.

Es bleibt nur noch

LXVII. $h = v' - \frac{h^2}{300}$

in Bezug auf Pariser Fuße.

Alle Hydrauliker hatten immer nach den Resultaten der Mariottschen Beobachtungen $h = H - \frac{h^2}{300}$ angenommen, welches sehr unrichtig werden kann, wenn die Umstände, unter welchen ein Springwerk angelegt ist oder werden soll, von jenen, unter welchen Mariotte seine Beobachtungen angestellt hat, sehr verschieden sind, so daß v' beträchtlich von H abweichen muß.

§. 38.

Für eine Sprungöffnung in einer dünnen Platte ist $\gamma^2 = 0,38$; also

LXVIII. $$v' = \frac{H}{\frac{0,38 \cdot \varepsilon^2}{w^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{40 \cdot d} + \frac{w^2 + \varepsilon^2}{0,38 \cdot \varepsilon^2} - 1\right)}$$

Für ein kurzes Sprungrohr ist

LXIX. $$v' = \frac{H}{\frac{\varepsilon^2}{w^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{40 \cdot d} + \frac{w^2 + \varepsilon^2}{0,65 \cdot \varepsilon^2} - 1\right)}$$

Daher für eine Oeffnung in einer dünnen Platte

LXX. $$h = \frac{H}{\frac{0,38 \cdot \varepsilon^2}{w^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{40 \cdot d} + \frac{w^2 + \varepsilon^2}{0,38 \cdot \varepsilon^2} - 1\right)} - \frac{h^2}{300}$$

Für ein kurzes cylindrisches Springrohr

LXXI. $$h = \frac{H}{\frac{\varepsilon^2}{w^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{40 \cdot d} + \frac{w^2 + \varepsilon^2}{0,65 \cdot \varepsilon^2} - 1\right)} - \frac{h^2}{300}$$

Bezeichnen wir den Divisor von H mit N, so ist allgemein

$$h = \frac{H}{N} - \frac{h^2}{300}$$

und hieraus wird allgemein

$$\text{LXXII.} \quad h = -150 + \sqrt{\left(22500 + \frac{300 \,.\, H}{N}\right)}$$

§. 39.

Aus LXXI. wird

$$h + \frac{h^2}{300} = \frac{H}{\frac{s^2 \lambda}{40 \,.\, w^2 \,.\, d} + \frac{w^2 + s^2}{0{,}65 \,.\, w^2} - \frac{s^2}{w^2}}$$

oder, wenn des Sprungrohres Durchmesser $= d'$ ist,

$$\frac{H}{h + \frac{h^2}{300}} = \frac{\lambda \,.\, (d')^4}{40 \,.\, d^5} + \frac{d^4 + (d')^4}{0{,}65 \,.\, d^4} - \frac{(d')^4}{d^4}$$

also, indem wir $\frac{H}{h + \frac{h^2}{300}} = E$ setzen,

$$40 \,.\, E \,.\, d^5 = \lambda \,.\, (d')^4 + 61 \,.\, d^5 + (61 - 40) \,.\, (d')^4 \,.\, d$$

Demnach für Springwerke mit einem Sprungrohre

$$d = \sqrt[5]{\frac{\lambda \,.\, (d')^4 + 21 \,.\, (d')^4 \,.\, d}{40 \,.\, E - 61.}}$$

oder

$$\text{LXXIII.} \quad d = \sqrt[5]{\frac{(\lambda + 21 \,.\, d) \,.\, (d')^4}{40 \,.\, E - 61}}$$

wofür man nun auch wie (LXII und LXIII)

$$\text{LXXIV.} \quad d = \sqrt[5]{\frac{\lambda \,.\, (d')^4}{40 \,.\, E - 61}}$$

setzen kann. Aus (LXX.) hat man für Springwerke mit einer Sprungöffnung in einer dünnen Platte

$$E = \frac{0,38 \cdot \varepsilon^2 \lambda}{40 \cdot w^2 \cdot d} + \frac{w^2 + \varepsilon^2}{w^2} - \frac{0,38 \cdot \varepsilon^2}{w^2}$$

also

$$40 \cdot E \cdot d^5 = 0,38 \cdot \lambda \cdot (d')^4 + 40 \cdot d^5 + 40 \cdot (d')^4 \cdot - 40 \cdot 0,38 \cdot (d')^4 \cdot d$$

oder

$$40 \cdot (E - 1) \cdot d^5 = 0,38 \cdot \lambda \cdot (d')^4 + 24,8 \cdot (d')^4 \cdot d$$

Daher

$$\text{LXXV.} \quad d = \sqrt[5]{\frac{(0,0095 \cdot \lambda + 0,62 \cdot d) \cdot (d')^4}{E - 1}}$$

wofür man nun auch

$$\text{LXXVI.} \quad d = \sqrt[5]{\frac{0,0095 \cdot \lambda \cdot (d')^4}{E - 1}}$$

setzen kann.

Uebrigens sieht man, daß bei einem Springwerke mit einer Oeffnung in einer dünnen Platte einmal $E > 1$ seyn müsse.

§. 40.

1. Ex. Man hat zu einem anzulegenden Springwerke die Fallhöhe $H = 80$ Pariser Fuß, und es wird hierzu eine 2000' lange Röhrenleitung erfordert; man verlangt für ein kurzes Springrohr zu 1,5'' im Durchmesser einen 40' hohen Strahl; wie groß muß d oder der Durchmesser der Röhrenleitung genommen werden?

Nach (LXXIV) erhalt man

$$\log. \lambda = \text{l. } 2000 \; \ldots\ldots\ldots = 3,3010300$$
$$\text{l } (d')^4 = 4 \cdot \text{l. } 0,125 \; \ldots\ldots = 0,3876400 - 4$$
$$= 3,6886700 - 4$$

$$E = \frac{80}{40 + \frac{1600}{300}} = 1{,}76;\ 40\,E - 61 = 70{,}4 - 61 = 9{,}4$$

$$\log.\ 9{,}4 = 0{,}9731279$$

Also

$$\log.\ d = \frac{3{,}6886700 - 4 - 0{,}9731279}{5}$$

$$= 3{,}7431084 - 4$$

Die zugehörige Zahl ist

$$d = 0{,}5534 \text{ Pariser Fuß} = 6{,}64 \text{ Zoll.}$$

2. Ex. Die Weite der Röhrenleitung in vorstehendem Exempel unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß der Strahl 60 Pariser Fuß hoch steige, und daß sich die Sprungöffnung in einer dünnen Platte befinde.

Nach LXXVI ist

$$\log.\ 0{,}0095 = 1{,}9777236 - 4 \qquad E = \frac{80}{60 + \frac{3600}{300}} = \frac{10}{9}$$

$$l.\ \lambda = 3{,}30103000$$

$$l\,(d')^4 = 0{,}3876400 - 4 \qquad E - 1 = \frac{1}{9}$$

$$5{,}6663936 - 8 \qquad l.\,(E - 1) = -0{,}9542425$$

Daher

$$\log.\ d = \frac{6{,}6206361 - 8}{5} = 3{,}7241272 - 4$$

Die zugehörige Zahl ist

$$d = 0{,}5298 \text{ Pariser Fuß} = 6{,}36 \text{ Zoll.}$$

Festigkeit der Röhren.

§. 41.

Ich füge die Untersuchung über die Festigkeit der Röhren nicht blos wegen ihres Zusammenhangs mit den bishe-

rigen Lehren und wegen ihrer praktischen Wichtigkeit bei, sondern insbesondere auch darum, weil dieser Gegenstand noch von Euler, Karsten und Kästner theils zu oberflächlich, theils unrichtig betrachtet worden ist, und schon darum von ihnen nicht gehörig erörtert werden konnte, weil sie den Widerstand des fliessenden Wassers in Röhren nicht kannten.

Es ist nämlich noch die Frage zu beantworten, wie dick man die Röhrenwände machen müsse, damit solche nicht bersten?

Man verzeichne zuerst von der ganzen beabsichtigten Röhrenleitung ein Profil, wie Fig. 1.

Bei dieser Verzeichnung kann man auf die nachstehende Weise verfahren. Man steckt auf dem Felde zuerst die Linie ab, nach welcher die Röhrenleitung gelegt werden soll, wobei man nur in solchen Stellen, wo sich das Gefälle merklich ändert, Pfähle einschlägt; dann nivellirt man genau von Pfahl zu Pfahl, und mißt zugleich die Länge der verschiedenen Strecken zwischen den einzelnen Pfählen mit Rücksicht auf ihre unvermeidliche Krümmungen.

Durch a', wo die Röhrenleitung am Behältnisse A ihren Anfang nehmen soll, zieht man nun eine horizontale a'd, trägt dann in d ein Perpendikel df so tief herab, als der 2te Pfahl in m' unter den 1ten in a' fällt; dann zieht man die horizontale ef und beschreibt aus a' mit einem Halbmesser, welcher der Länge der ganzen ersten Strecke gleich ist (die Krümmungen mit gemessen) einen Bogen $\alpha\beta$; der Durchschnittspunkt m' ist die Stelle für den 2ten Pfahl m'. Unterhalb f schneide man aufs Neue die fs so tief unter f ab, als der 3te Pfahl nach dem Nivellement unter dem 2ten liegt, und ziehe durch s die horizontale gh; aus m' beschreibe man wieder mit einem Halbmesser, welcher der Ent-

fernung des 3ten Pfahls vom 2ten (mit den Krümmungen) gleich ist, einen Bogen $\gamma\delta$, so bezeichnet der Durchschnittspunkt n' die Stelle des 3ten Pfahls u. s. f.

Auf solche Weise erhält man die Längen und Tiefen der nach einander folgenden Röhrenstrecken, und kann nun die Röhrenleitung a'm'n'o'p'c verzeichnen. Die Perpendikel aa', mm', nn', oo' etc. bezeichnen die Tiefen unter dem Wasserspiegel.

§. 42.

Es sey nun $i\mu$ eine horizontale durch die tiefste Stelle p', vc eine horizontale durch die höchste Stelle der Röhrenleitung zur Rechten von p'; ν sey eine unbestimmte oder willkührlich angenommene Stelle in der centrischen Linie der Röhrenleitung, und $\nu\delta'$ ein Perpendikel auf $i\mu$; die Höhe zk sey $= \zeta$, die $\nu\delta' = \zeta'$, so gehört der Druck, welchen die Wasserschichte bei ν leidet, fürs erste zur Druckhöhe $\zeta - \zeta'$.

Hierzu kommt nun noch der Druck, welcher zur Ueberwindung des von den Röhrenwänden herrührenden Widerstandes bei ν angewendet werden muß. Ist nämlich die Länge der ganzen Röhrenleitung von a' bis c $=$ L, von a' bis zur angenommenen Stelle $\nu = l$, der Röhrendurchmesser durchaus $=$ d, so ist die Widerstandshöhe wegen der Röhrenwände $= 0{,}025 \cdot \frac{L - l}{d}$; also, wenn die Ausflußöffnung bei c $=$ der Röhrenweite w ist, und zugleich auf den Druck der Atmosphäre Rücksicht genommen wird, den wir $= k \cdot w$ setzen,

$$\text{LXXVII.}\quad \left.\begin{array}{l}\text{Gesamte Druckhöhe}\\ \text{für jede Stelle } \nu\end{array}\right\} = \zeta - \zeta' + 0{,}025 \cdot \frac{L - l}{d} v\, w^2 + k$$

Wäre aber die Ausflußöffnung bei c $<$ w, nämlich $= \iota$, so wäre allgemeiner

LXXVIII. $$\left.\begin{array}{l}\text{Gesammte Druckhöhe}\\ \text{für die Stelle ,}\end{array}\right\} = \zeta - \zeta' + \left(0{,}025 \cdot \frac{L-l}{d} + \frac{w^2 - \gamma^2 \iota^2}{\gamma^2 \iota^2}\right) \cdot v + k$$

Anm. Wenn dieser Ausdruck $>$ k ist, so wird der Theil k durch den Gegendruck der auf die äußere Wandfläche druckenden Atmosphäre wieder aufgehoben. In Fällen aber, wo dieser Ausdruck $<$ k wird, leidet die Röhrenwand noch einen Druck von außen nach innen; sie kann also in solchen Fällen nicht vom inneren Druck bersten, wohl aber, wenn sie als Gewölbe nicht hinlänglich widersteht, zusammengedruckt werden. Macht man an solchen Stellen eine Seitenöffnung, bringt an dieser eine abwärts hängende Röhre an, und läßt das untere Ende dieser Seitenröhre in ein mit Wasser gefülltes Gefäß eingreifen, so steigt vermöge des auf die Wasserfläche in diesem Gefässe wirkenden Drucks der Atmosphäre das Wasser aus dem Gefässe aufwärts und fließt mit dem übrigen Wasser in der Röhrenleitung längs derselben ab. Ich mache diese Erfolge durch dazu verfertigte Apparate anschaulich.

§. 43.

Bezeichnen wir die in Bezug auf Festigkeit bei Beobachtungen vollkommen hinlänglich befundene Wanddicke bei Röhren mit $\triangle'$, den Durchmesser der Beobachtungsröhren mit d', und die bei den Beobachtungen gehabte Druckhöhe (gesammte auf Druck wirkende Höhe) mit h', und werden nun die ähnlichen Buchstaben ohne Accente für Abmessungen derselben Art bei irgend einer anderen Röhre gebraucht, so setzen wir analogisch

$$\Delta = \frac{h \,.\, d}{h' \,.\, d'} \,.\, \Delta'$$

unter der Voraussetzung, daß die bei süsem Wasser angestellten Beobachtungen auch wieder auf Röhren mit süsem Wasser angewendet werden.

Geschieht aber die Anwendung auf Flüssigkeiten von größerem specifischem Gewicht z. B. auf salzige Wasser, und setzt man das spec. Gewicht $= \mu$, das des süsen Wassers $= 1$ gesetzt, so hat man allgemeiner

$$\text{LXXIX.}\quad \Delta = \frac{\mu \,.\, h \,.\, d}{h' \,.\, d'} \,.\, \Delta'$$

wo es nur darauf ankommt, zusammengehörige Werthe von Δ', h', d' aus der Erfahrung zu nehmen. Eigene Erfahrungen gaben mir nun

1. Für gegossene eiserne Röhren

$$\text{LXXX.}\quad \left\{ \begin{array}{l} h' = 240 \text{ Fuß} \\ d' = 10 \text{ Zoll} \\ \Delta' = 12 \text{ Linien} \end{array} \right\} \text{Daher } \Delta = \frac{\mu\, h\, d}{200} \text{ Linien}$$

2. Für buchene Röhren

$$\text{LXXXI.}\quad \left\{ \begin{array}{l} h' = 240 \text{ Fuß} \\ d' = 14 \text{ Zoll} \\ \Delta' = 30 \text{ Linien} \end{array} \right\} \text{Daher } \Delta = \frac{\mu\, h\, d}{112} \text{ Linien}$$

3. Für fichtene Röhren

$$\text{LXXXII.}\quad \left\{ \begin{array}{l} h' = 40 \text{ Fuß} \\ d' = 6 \text{ Zoll} \\ \Delta' = 60 \text{ Linien} \end{array} \right\} \text{Daher } \Delta = \frac{\mu\, h\, d}{4} \text{ Linien.}$$

Dabei bemerke ich noch:

1) Daß die buchenen Röhren mit etwa 3 Zoll breiten fast $\frac{1}{2}$ Zoll dicken eisernen Reifen belegt waren, die nur etwa 10 Zoll weit von einander ablagen.

2) Daß die eisernen Reife an den fichtenen Röhren schwächer waren, und etwa acht Fuß weit von einander abstanden.

3) Gewiß wurden auch schon geringere Dicken sowohl der Wände als der eisernen Reife hinlängliche Festigkeit gegeben haben. Inzwischen geht man um soviel sicherer, wenn man diese Bestimmungen beibehält.

4) Die Wanddicke gegossener eiserner Röhren nehme man wegen der immer zu befürchtenden Unvollkommenheit des Gusses nie unter 3 Linien, wenn auch die Berechnung weniger gäbe.

Die Größe h wird nach LXXVIII in Rechnung gebracht, doch so, daß man in der Anwendung auf LXXX, LXXXI und LXXXII von jenem Werthe (LXXVIII) k abzieht; h wird allemal in Fussen, d in Zollen ausgedruckt, und hiermit findet man Δ in Linien. Uebrigens behält man streckenweis einerlei Werth von Δ bei, bis man an eine Stelle „ kommt, welche eine merkliche Aenderung von Δ gestattet, besonders bei hölzernen Röhren *).

---

*) Hier noch eine sehr wichtige praktische Frage, die ich nicht etwa darum, weil ich sie nur in einer Note beifüge, für minder wichtig zu halten bitte. Sie ist meines Wissens bisher noch von keinem Schriftsteller berührt, noch viel weniger beantwortet worden.

Man denke sich an einer horizontalen Axe zwei Scheiben (deren Massen wir hier zur Abkürzung des Ausdrucks bei Seite setzen). Der Halbmesser der Scheibe, an deren Umfang die Kraft wirkt, sey R; die, an welcher die Last wirkt, = r; die Kraft sey ein herabhängendes Gewicht P, die Last ein herabhängendes Gewicht Q; so ist, wenn wir alle übrige Gewichte bei Seite setzen, und die Ueberwucht mit V bezeichnen,

$$V = P - \frac{r}{R} \cdot Q$$ { indem wir auch die Reibung an den Wellzapfen außer Acht lassen.

Die Dübüatsche Formel für die Bewegung des Wassers in gleichweiten Röhren ohne plötzliche Wendungen.

§. 44.

Setzt man die Einflußöffnung α = der unveränderlichen Röhrenweite w, so ist die noch wirkende Druckhöhe = $H - \frac{\left(\frac{c^2}{4g}\right)}{\gamma^2}$, also in Pariser Zollen

$$= H - \frac{c^2}{0{,}65 \,.\, 4 \,.\, 181} = H - \frac{c^2}{470}$$

Wenn nun V einen bejahten Werth erhält, also das Gewicht wirklich niedersinkt: welchen Druck leidet die Axe? Er heise Z, so ist

$$Z = Q + (P - V) + (1 - f) \,.\, V$$

wenn f die beschleunigende Kraft bezeichnet. Wäre nämlich das Gewicht P aus zwei Stücken V und P — V zusammengesetzt, so wäre das P — V mit Q im Gleichgewicht, also deßhalb der Druck von Gewicht und Gegengewicht = (P — V) + Q. Dieses würde auch der gesammte Druck seyn, wenn das andere Stück V den Eindrücken der Schwere frei folgen könnte. Da aber V nicht frei herabfallen kann, sondern nur so sinkt, als wirkte nur eine Kraft = f in die Atomen dieser Masse, da doch wirklich eine Kraft = 1 in dieselben wirkt, so muß der übrige Theil dieser Kraft 1 — f auf Druck verwendet werden; es kommt also zu (P — V) + Q noch der Druck (1 — f). V.

Es ist aber, alle Reibungen bei Seite gesetzt,

$$V = P - \frac{r}{R} \,.\, Q; \quad f = \frac{P - \frac{r}{R} \cdot Q}{P + \frac{r^2}{R^2} \cdot Q}$$

also

wofür Dubuat $H - \frac{c^2}{478}$ setzt, weil er γ etwas weniges größer annimmt, welches aber für die Ausübung von keiner Wichtigkeit ist.

$$\text{LXXXIII.}\ Z = Q + P - f \cdot V = Q + P - \frac{\left(P - \frac{r}{R} \cdot Q\right)^2}{+ \frac{r^2}{R^2} \cdot Q}$$

Ex. Es sey $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$, $P = 100$, $Q = 120$, so wird

$$Z = 120 + 100 - \frac{(100 - 60)^2}{100 + 30}$$

$$= 220 - \frac{1600}{130} = 207,7.$$

Für blose Rechnung nach Gleichgewicht hätte man $120 + \frac{120}{2} = 180$.

Auf eben dieser Betrachtung beruht nun auch die Bestimmung der Druckhöhe, welcher für eine Stelle von der Wand eines Stiefels in Betrachtung kommt, wenn aus demselben mittelst eines niedergedruckten Kolbens Wasser durch eine Steigröhre gepreßt wird.

Es sey die Weite des Stiefels $= W$, die der Steigröhre $= w$, die Länge der Steigröhre $= \lambda$, ihre lothrechte Höhe über dem tiefsten Kolbenstande $= H$; auf dem Kolben liege eine Masse P die mit ihrem ganzen Gewicht P den Kolben nieder zu treiben strebt: welchen Druck wird die Stiefelwand in der Stelle des tiefsten Kolbenstandes auszuhalten haben?

Die Widerstandshöhe wegen des hydrostatischen Drucks ist $= H$.

Die Widerstandshöhe wegen der Röhrenwände $= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot v$, wo man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus (LII) nimmt, und v die Fallhöhe ist, welche der Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung zugehört.

Würde also die Geschwindigkeit des Wassers nicht in den Röhren selbst noch vermindert, so hätte man

$$c = 2 \cdot \sqrt{181 \cdot \left(H - \frac{c^2}{470}\right)}$$

Man hat also hier, wenn P in Kubik Fuß Wassers ausgedruckt wird,

$$V = P - (H + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot v) \cdot W$$

$$f = \frac{P - (H + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot v) \cdot W}{\mathfrak{P} + \frac{W^2}{w^2} \cdot \lambda w}$$

$$= \frac{P - (H + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot v) \cdot W}{\mathfrak{P} + \frac{W}{w} \cdot \lambda W}$$

Die ganze Tiefe des Kolbenschubs sey b; wäre nun $f = \frac{P - H \cdot W}{\mathfrak{P} + \frac{W}{w} \cdot \lambda W}$ also unveränderlich, so wäre am Ende des Kolbenschubs die Geschwindigkeit des Kolbens $= 2\sqrt{f \cdot g b}$, also die zugehörige Höhe $= \frac{P - HW}{\mathfrak{P} + \frac{W}{w} \cdot \lambda W} \cdot b$, und $v = \frac{W^2}{w^2} \cdot \frac{P - HW}{\mathfrak{P} + \frac{W}{w} \cdot \lambda W} \cdot b$; die Hälfte dieses Werths wollen wir mit h bezeichnen, so können wir wenigstens beinahe

$$f = \frac{P - (H + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot h) \cdot W}{\mathfrak{P} + \frac{W}{w} \cdot \lambda W}$$

für die Bewegung des Kolbens durch die Tiefe b annehmen. (Eine genauere theoretische Entwickelung findet man in meinem Handb. der Mech. fester und flüss. Körper Heidelb. 1807.) Hiernach erhalten wir also nunmehr hier wo Q nicht, wie vorhin, noch besonders in Rechnung kommen kann

Setzt man nun die Fläche eines Röhrenquerschnitts $= \varkappa$ den Umfang dieser Kreisfläche $= p$, so kann man für die Röhrenlänge λ hypothetisch

$$c = \phi . \sqrt{181 . \frac{\varkappa}{\lambda p} . H - \frac{c^2}{470}}$$

setzen, oder, ψ statt $\phi \sqrt{181}$ gesetzt,

$$\text{LXXXVI. } c = \psi . \sqrt{\frac{\varkappa . \left(H - \frac{c^2}{470}\right)}{\lambda p}}$$

$$Z = (P - V) + (1 - f) . V = P - f . V$$

$$= P - \frac{P - (H + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h) . W}{\mathfrak{P} + \frac{W^2}{w^2} . \lambda W} . (P - (H + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h) W)$$

oder

$$\text{LXXXIV. } Z = P - \frac{[P - (H + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h) . W]^2}{\mathfrak{P} + \frac{W^2}{w^2} . \lambda W}$$

Allemal geht also von dem ganzen statischen Druck noch der Quotient ab, welcher herauskommt, wenn man das Quadrat der Ueberwucht durch die gesammte auf den Kraftpunkt reducirte Masse dividirt.

Weil sich hier nun Z, P und $\mathfrak{P}$ (In unserem Falle ist $\mathfrak{P} = P$) auf Kubik Fusse Wasser beziehen, so erhält man für die Druckhöhe, welche wir mit $\mathfrak{h}$ bezeichnen wollen,

$$\text{LXXXV. } \mathfrak{h} = \frac{Z}{W} = \frac{P}{W} - \frac{[P - (H + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) . h) . W]}{\left(\mathfrak{P} + \frac{W^2}{w^2} . \lambda W\right) . W}$$

Setzen wir diesen Werth von $\mathfrak{h}$ statt h in LXXX, LXXXI und LXXXII, so erhalten wir $\triangle$. Hiernach muß das berichtigt werden, was Karsten (Lehrbegr. der ges. Math. V. Th. §. 354.) hierüber sagt.

Statt $\frac{H - \frac{c^2}{470}}{\lambda}$ setzt Dûbûat $\frac{1}{b}$, und statt $\frac{x}{p}$ gebraucht er r. Dieses giebt

$$\text{LXXXVII.}\quad c = \psi \cdot \sqrt{\frac{r}{b}} = \psi \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{b}}.$$

Hätte es nun mit dieser Gleichung seine vollkommene Richtigkeit, so müßte ψ also $\frac{c}{\sqrt{\frac{r}{b}}}$ oder $c \cdot \sqrt{\frac{b}{r}}$ eine unveränderliche Zahl seyn. Da aber die Erfahrung hiermit nicht genau zusammenstimmt, so suchte Dûbûat den Ausdruck durch eine kleine Korrektion der Erfahrung näher zu bringen. Er setzte zu dem Ende

$$\text{LXXXVIII.}\quad c = \frac{\psi \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - \text{logn.}\,(\sqrt{b} + 1{,}6)}$$

Dieses giebt

$$\psi = \frac{c \cdot (\sqrt{b} - \text{logn.}\,\sqrt{(b + 1{,}6)})}{\sqrt{r} - 0{,}1}$$

Berechnet man hiernach mittelst obiger Erfahrungen ψ, so erhält man diesen Werth, wenn alles in Pariser Zollen ausgedruckt wird, theils größer, theils $<$ 297. Daher nimmt Dûbat nunmehr nach (LXXXVIII)

$$\text{LXXXIX.}\quad c = \frac{297 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - \text{logn.}\,(\sqrt{b} + 1{,}6)}$$

Um aber auch die nach dieser Formel besonders bei etwas großen Werthen sich noch zeigenden Abweichungen von den Resultaten der Erfahrung zu mindern, setzt er noch ein subtraktives Glied hinzu, und so kommt er endlich auf seine Formel

$$\text{XC.}\quad c = \frac{297 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - \text{logn.}\,(\sqrt{b} + 1{,}6)} - 0{,}3 \cdot \sqrt{r} - 0{,}1)$$

wo $v = \frac{1}{4}d$ oder der 4te Theil vom Durchmesser der Röhren und $b = \frac{\lambda}{H - \frac{c^2}{470}}$ ist.

Offenbar wird die Gleichung (XC) durch die Substitution des Werthes von b transscendentisch. Man findet aber sehr nahe dasselbe, wenn man $\sqrt{\frac{\lambda}{H}}$ statt $\sqrt{\frac{\lambda}{H - \frac{c^2}{470}}}$ und logn. $(\sqrt{\frac{\lambda}{H}} + 1,6)$ statt logn. $(\sqrt{\frac{\lambda}{H - \frac{c^2}{470}}} + 1,6)$ setzt. Bezeichnet man nun den hiernach aus (XC) berechneten Werth von c mit c′, und nimmt nun $b = \frac{\lambda}{H - \frac{(c')^2}{470}}$ so erhält man den Werth von c nunmehr aus XC so genau als durch die strengste Entwickelung.

§. 45.

Es ist mir leid, hier noch sagen zu müssen, daß Dübuats Bemühungen um diesen Gegenstand in Teutschland unbekannt und unbenutzt blieben, bis ich in meinem Lehrbuche der Hydraulik damit bekannt machte. Uebrigens ist Dübuats Vortrag und Zusammenstellung hierher gehöriger Sätze für den Praktiker nicht sehr einladend; er ist verwikkelt und äußerst gedehnt, und man darf sich seine Belehrung nicht etwa so denken, wie ich die Resultate im vorigen §. zusammengeordnet habe. Auch sind die dabei angebrachten Künsteleien, womit er seiner Formel eine allgemeine Anwendbarkeit verschaffen wollte, für die Ausübung nicht nur ohne allen Nutzen, sondern erschwerte damit noch ihren

Gebrauch und machte sie zur unmittelbaren Ableitung solcher Ausdrücke, deren man zur Beantwortung so mancher hierher gehörigen wichtigen Fragen bedarf, durch ihre transscendentische Form unbrauchbar. Sogar giebt sie in den anwendbaren und am häufigsten vorkommenden Fällen, im Durchschnitt genommen nicht einmal genauere Resultate, als unsere weit einfachere Darstellung, wie wir sie oben mit mannigfaltigen höchst nützlichen Ableitungen mitgetheilt haben.

Die Pronysche Formel für die Bewegung des Wassers in gleichweiten Röhren ohne plötzliche Wendungen.

§. 46.

Prony legt in seinem 1804 zu Paris erschienenen Werke *) (S. 84. der Uebersetzung) folgende hypothetische Formel zum Grunde

$$\frac{1}{4} g d j = \alpha U + \beta U^2$$

oder nach unseren bisherigen Bezeichnungen

$$\text{XCI.} \quad \frac{1}{2} g d \cdot \frac{H}{\lambda} = \alpha c + \beta c^2$$

Er bringt dabei alles auf Meter; weil nun in Metern $g = 4{,}904397$ ist, so kann man auch

$$\text{XCII.} \quad \frac{2{,}452198 \cdot dH}{\lambda} = \alpha c + \beta c^2$$

*) Récherches physico-mathematiques sur la Théorie des eaux courantes. Von dieser Schrift erschien zur Ostermesse 1812 eine Uebersetzung unter dem Titel: Theoretisch-praktische Abhandlung über die Leitung des Wassers in Kanälen und Röhrenleitungen von Prony, mit vielen Anmerkungen und Erläuterungen. Giesen 1812.

setzen. Was ihn zur Einschaltung des Faktors $\frac{1}{2}$g veranlaßt hat, kann hier um so mehr übergangen werden, weil dieser ganze Ausdruck als blos hypothetisch anzusehen ist, so daß er dafür ganz füglich schlechthin

$$\text{XCIII.} \quad \frac{dH}{\lambda} = \alpha c + \beta c^2$$

hätte setzen können, indem α und β Koefficienten sind, die erst noch aus den oben mitgetheilten Beobachtungen abgeleitet werden müssen.

Die hypothetische Formel gründet sich im Allgemeinen blos darauf, daß c desto größer werden muß, je größer d und H sind, und je kleiner λ ist, daß also c von dem Quotient $\frac{dH}{\lambda}$ abhängt. Prony hätte in dieser Rücksicht auch einfacher $\frac{dH}{\lambda} = \beta c^2$ setzen können. Indem man aber hier darauf ausgeht, das Gesetz zu entdecken, nach welchem die Natur auf die Verzögerung der Bewegung wirkt, und es wenigstens analogisch ist, theils die Geschwindigkeit selbst, theils das Quadrat der Geschwindigkeit in Bezug auf die Bestimmungsstücke d, H und λ zu setzen, so ist es der Natur der Sache angemessener, beide Potenzen in die Formel einzuführen, um auf solche Weise der Natur eine weniger beschränkte Form vorzuschreiben, und nun aus Vergleichung mit den Beobachtungen abzuleiten, wie die Wirkung von jeder Potenz insbesondere abhängt. Hiengen die Widerstände wirklich nur von der 2ten Potenz von c ab, so würde sich aus den Beobachtungen $\alpha = 0$ ergeben. Prony findet a. a. O. für die Gleichung (XCII)

$$\text{XCIV.} \quad \alpha = 0{,}00017; \; \beta = 0{,}003416$$

also

$$\text{XCV.}\quad \frac{2{,}452198\,.\,d\,.\,H}{\lambda} = 0{,}00017\,.\,c + 0{,}003416\,.\,c^2$$

und durch Auflösung dieser Gleichung

$$\text{XCVI.}\quad c = -0{,}0248829 + \sqrt{\left(0{,}000619159 + 717{,}857\,.\,\frac{d\,H}{\lambda}\right)}$$

Nach der umständlichen Berechnung, welche ich a. a. O. beigefügt habe, findet man

$$\text{XCVII.}\quad \alpha = 0{,}000147\,;\ \beta = 0{,}003772$$

und hieraus

$$\text{XCVIII.}\quad c = -0{,}01948 + \sqrt{\left(0{,}0003794704 + 650\,.\,\frac{d\,H}{\lambda}\right)}$$

§. 47.

Prony hat nach seiner Formel (hier XCVI) berechnete Geschwindigkeiten a. a. O. in der Tabelle No. 2. für sämtliche oben angegebene 51 Beobachtungen (§. 19.) auf folgende Weise mitgetheilt. Sämtliche Zahlen beziehen sich auf Meter.

beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.
0, 04301	0, 04275	0, 36044	0, 37132
0, 05443	0, 05913	0, 38077	0, 39147
0, 08538	0, 09212	0, 40908	0, 42872
0, 09807	0, 09267	0, 43658	0, 44018
0, 11172	0, 12632	0, 44081	0, 46181
0, 13010	0, 13303	0, 44332	0, 44161
0, 14112	0, 14334	0, 45004	0, 46181
0, 14409	0, 14674	0, 49549	0, 48501
*) 0, 23521	0, 28950	0, 51151	0, 51224
0, 28264	0, 30842	0, 51279	0, 51224
0, 28886	0, 30842	0, 54115	0, 54501
0, 33087	0, 33590	0, 56054	0, 54585
0, 34005	0, 35533	0, 56766	0, 57665

beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.
0,56933	0,56340	0,89764	0,90748
0,59164	0,59606	0,93318	0,90748
0,60317	0,59903	0,96816	0,90710
0,63235	0,63273	1,06003	1,05924
0,64443	0,63436	1,09151	1,11643
0,64979	0,63235	1,16401	1,11643
0,66947	0,63437	1,31381	1,28963
0,74361	0,69720	1,57845	1,70434
0,75999	9,73432	1,59193	1,68977
0,77607	0,76601	1,59450	1,58898
0,79085	0,78234	1,93011	2,07979
0,79426	0,89297	2,29946	2,42049
0,83635	0,78187		

Die einzige etwas starke Abweichung ist die mit *) bezeichnete; aber nach allen Regeln der Kritik muß diese einzige Beobachtung in der Zusammenstellung mit den übrigen 50 als fehlerhaft verworfen werden.

Anm. Ein Meter ist $= \begin{cases} 3{,}187249 \text{ rhl. Fuß} \\ 3{,}079458 \text{ Par. —} \end{cases}$

Druckt man d in Par. Fussen aus, so wird in Metern

$$c = -0{,}0249 + \sqrt{\left(0{,}000619 + 233 \cdot \frac{dH}{\lambda}\right)}$$

und in Pariser Fussen

$$c = 3{,}079 \cdot \left(-0{,}0240 + \sqrt{\left(0{,}000619 + 233 \cdot \frac{dH}{\lambda}\right)}\right)$$

oder

$$\text{XCIX.}\quad c = -0{,}0766 + \sqrt{\left(0{,}005868 + 2209 \cdot \frac{dH}{\lambda}\right)}$$

§. 48.

Aus den vorstehenden Berechnungen wird die Anwendbarkeit der Pronyschen Formel hinlänglich erwiesen. Aber unsere obigen Formeln geben ebenso befriedigende Resultate, und sind besonders in Fällen, wo man v braucht, ungleich bequemer. Man hätte daher gar keinen Grund, die Pronysche Formel vorziehen zu wollen. Im Gegentheil hat Prony einen wesentlichen Fehler in seine Formel einschleichen lassen, indem er auf die Zusammenziehung des Strahls beim Einflusse in die Röhrenleitung gar keine Rücksicht genommen hat.

Die obige Formel giebt für ein kurzes Ansatzrohr, für welches wir $\lambda = d$ nehmen wollen,

$$c = -0{,}0766 + \sqrt{(0{,}005868 + 2209 \,.\, H)}$$

also z. B. für $H = 4'$, sehr genau $c = 94$ Fuß, eine in die Augen fallende grosse Unrichtigkeit und blos Folge jener Vernachlässigung. Unsere Formel (LII) giebt dagegen richtig $c = 12{,}7$ Fuß.

Um in dieser Hinsicht die Pronysche Formel (XCIX) zu verbessern, müßte man so ergänzen:

$$\text{C.}\quad c = -0{,}0766 + \sqrt{\left(0{,}005868 + 2209 \,.\, \frac{dH}{\lambda + 56 \,.\, d}\right)}$$

Drittes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in regulären offenen Kanälen *).

A. Die Chezysche Formel.

§. 49.

Ich würde ungerecht gegen meine Landesleute seyn, wenn ich behaupten wollte, daß die Franzosen diesem Gegenstande früher ihre Aufmerksamkeit geschenkt hätten. Aber eine ausgemachte Wahrheit ist es, daß überhaupt die französische Regierung von jeher die Wünsche, Vorschläge und Bemühungen solcher Männer, die sich mit dergleichen Gegenständen und überhaupt mit praktischen Anwendungen der Mathematik beschäftigten, bei weitem liberaler unterstützten

*) Man könnte sich Wasserräder nicht mit kreisförmigem, sondern irregulärem Umfange von millionen verschiedenen Formen denken. Die Forderung einer allgemeinen Theorie solcher Räder wäre noch nicht so lächerlich, als die einer allgemeinen Theorie der Bewegung des Wassers in unseren regellos gebildeten natürlichen Flußbetten. Freilich wäre jene unnütz, diese sehr wünschenswerth. Inzwischen bleibt doch selbst die auf nur reguläre Kanäle beschränkte Theorie für die Ausübung höchst wichtig, und sie kann uns auch bei natürlichen Flußbetten zu statten kommen.

als teutsche Regierungen, die auch nur ein Sümmchen von 100 Rthlr., auf Versuche zur Erweiterung praktischer Kenntnisse verwendet, für einen unverantwortlichen Aufwand erklären und daher aus Pflichten versagen, und so den hiervon nicht gehörig unterrichteten Landesfürst und das Land selbst entehren *). Chezy vormals Director der Unterrichtsanstalt im Brücken- und Strassenbau, Pronys Vorgänger in eben diesem Amte, gieng bei Anlegung des Kanals de l'Yvette zuerst darauf aus, einen allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit des Wassers in einem regulären Kanale zu finden, unter der Voraussetzung, daß solche längs dem Kanale gleichförmig geworden sey. Er sahe sehr wohl ein, daß solche bei einer Wassertiefe h nicht $= \frac{2}{3} \sqrt{4gh}$ ($g = 15,1$ Pariser Fuß verstanden) gesetzt werden könne; er hielt es vielmehr der Sache angemessen, daß die Geschwindigkeit c von dem Abhange ζ, welchen der Wasserspiegel auf eine bestimmte Länge λ habe, dann von der Größe des Breitenprofils w und vom benetzten Umfange χ dieses Profils abhänge, und setzte hiernach

$$\text{CI.} \quad c = \sqrt{\frac{2gw\zeta}{\beta\lambda\chi}}$$

wo β eine Zahl ist, welche erst aus Beobachtungen abgeleitet werden muß.

---

*) Man sage mir hier nicht, daß nothwendige Ausgaben den nützlichen vorgehen. Denn solche den schuldlosen Fürst und die Nation entehrende Versagungen findet man in Staaten, wo ungleich größere Summen ohne Noth und ohne Nutzen verschwendet werden. Nicht selten spricht sich freilich in solchen Beschlüssen nur Unwissenheit, Leidenschaftlichkeit, persönliches Verhältniß und böser Wille eines einzelnen Regierungsgliedes aus; aber die Schande trift immer das Ganze.

Da β hier noch unbestimmt ist, so können wir dem Ausdruck eine einfachere Form geben, indem wir ϕ statt $\sqrt{\frac{2g}{\beta}}$ schreiben. Hiermit erhalten wir

$$\text{CII.} \quad c = \phi . \sqrt{\frac{w\zeta}{\lambda\chi}}$$

§. 50.

Dubuat hat in seiner (von Eytelwein und von Kempe übersetzten) Hydraulik viele hieher gehörige Beobachtungen mitgetheilt, aus welchen wir ϕ abzuleiten haben:

1) 17 Beobachtungen über künstliche trapezische Kanäle
2) 9 —— über künstliche rechtwinkl. Kanäle
3) 6 —— beim Kanale du Jard
4) 4 —— am Fluß de Hayne.

Um einen mittleren Werth von ϕ zu bestimmen, glaube ich blos die Beobachtungen No. 1 u. 2 zum Grunde legen zu dürfen, und auch von diesen die 4te, 5te, 6te, 15te, 21ste, 25ste und 26ste ausschliesen zu müssen. Hiernach bleiben folgende übrig:

Nr.	Werthe von w in Par. □''	Werthe von χ in Par. Zollen	Werthe von λ in Par. Zollen	beobachtete Werthe von c in Par. Zollen	berechnete Werthe von ϕ
		I. Trapezischer Kanal.			
1.	18,84	13,06	212	27,51	333,94
2.	50,60	29,50	212	28,92	321,53
3.	83,43	26,00	412	27,14	307,53
7.	56,43	21,50	427	23,54	300,25
8.	98,74	28,25	432	28,29	314,51
9.	100,74	28,53	432	28,52	315,45
10.	119,58	31,06	432	30,16	319,47
11.	126,20	31,91	432	31,58	330,05

Nr.	Werthe von w in Par. $\lceil'''\rceil$	Werthe von χ in Par. Zollen	Werthe von λ in Par. Zollen	beobachtete Werthe von c in Par. Zollen	berechnete Werthe von ϕ
		I. Trapezischer Kanal.			
12.	130,71	32,47	432	31,89	330,36
13.	135,32	33,03	432	32,52	333,17
14.	20,83	13,62	1728	8,94	300,51
16.	36,77	17,56	1728	11,45	328,93
17.	42,01	18,69	1728	12,34	342,60
		II. Rechtwinklichter Kanal.			
18.	34,50	21,25	458	20,24	340,01
19.	86,25	27,25	458	28,29	340,31
20.	34,50	21,25	929	13,56	324,56
22.	51,75	23,25	1412	12,10	304,76
23.	76,19	26,08	1412	14,17	311,88
24.	105,78	29,17	1412	15,55	306,84

Für alle diese Beobachtungen ist $\zeta = 1$. Die Zahlen der letzten Kolonne sind von Eytelwein berechnet worden.

§. 51.

Die Summe der 19 Werthe von ϕ ist 6106,24; also im Durchschnitt

$$\phi = \frac{6106,24}{19} = 321,4$$

Wir nehmen dafür

CIII. $\phi = 321$.

Der kleinste Werth von ϕ ist (Nr. 7.) = 300,25; der größte (Nr. 17.) = 342,60; ihr arithm. Mittel $= \frac{642,85}{2} = 321,4$ welches mit dem arithm. Mittel aller 19 Beobachtungen einerlei ist. Die größte Abweichung des

Mittelwerths vom wahren beträgt also nicht über $\frac{1}{15}$ bei diesen Beobachtungen. Wir erhalten hiernach aus (CII)

$$\text{CIV.} \quad c = 321 \cdot \sqrt{\frac{w\zeta}{\lambda\chi}}$$

wo sich alle Größen auf Pariser Zolle beziehen.

Soll nur c auf Zolle, die übrigen Größen auf Fusse gehen, so hat man

$$c = 321 \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot 12 \cdot w \times 12 \cdot \zeta}{12 \cdot \lambda \times 12 \cdot \chi}}$$

$$= 321 \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot w\zeta}{\lambda\chi}}$$

Soll aber auch c auf Fusse gehen, so wird

$$c = \frac{321}{12} \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot w\zeta}{\lambda\chi}}$$

oder

$$\text{CV.} \quad c = 92{,}66 \cdot \sqrt{\frac{w\zeta}{\lambda\chi}}$$

wo alles auf Pariser Fusse geht.

In Bezug auf rheinländische Fusse wird

$$\text{CVI.} \quad c = 96 \cdot \sqrt{\frac{w\zeta}{\lambda\chi}}$$

§. 52.

Um den Gedanken zu beseitigen, als hätten die Beobachtungen beim Kanale du Jard und dem Flusse de Hayne weit andere Werthe von ϕ gegeben, wollen wir noch die auch bei diesen angestellte Beobachtungen mittheilen:

Nr.	Werthe von w in Par. □″	Werthe von χ in Par. Zollen	Werthe von λ in Par. Zollen	beobachtete Werthe von c in Par. Zollen	berechnete Werthe von φ
	III. Der Kanal du Jard.				
27.	16252	402	8919	17,42	258,74
28.	11905	366	11520	12,17	229,05
29.	10475	360	15360	15,74	361,63
30.	7858	340	21827	9,61	295,33
31.	7376	337	27648	7,79	276,87
32.	6125	324	27648	7,27	278,10
	IV. Der Fluß de Hayne.				
33.	31498	569	6048	35,11	367,01
34.	38838	601	6413	31,77	316,49
35.	30905	568	32951	13,61	334,93
36.	39639	604	35723	15,96	372,36

Die Summe der 10 Werthe von φ ist 3090,5; also ihr Mittelwerth = 309. Da dieser Werth nur um $\frac{1}{28}$ von 321 verschieden ist, so kann uns dieses nicht veranlassen, die vorhin gefundene Zahl abzuändern, zumal da bei vorigen Beobachtungen ein genaueres Verfahren statt hatte als bei diesen. Wir müssen vielmehr aus dieser Zusammenstellung schliesen, daß jene nur von kleinen Kanälchen hergenommene Bestimmungen auch mit einiger Sicherheit auf reguläre Kanäle anwendbar bleiben, die 1000mal so große Querschnitte haben als die in I und II. Für die Ausübung wird freilich ein hoher Grad von Sicherheit verlangt, um solche Formeln mit vollem Vertrauen gebrauchen zu können. Man muß gegen die Furcht, weniger Wasser, als man zu einem bestimmten Zwecke nöthig hat, zu erhalten, ebenso geschützt seyn, als bei manchen Wasserbauten gegen die Gefahr, mehr

Wasser zu erhalten. Wir setzen daher in Bezug auf diese entgegengesetzte Fälle folgende beide Gränzbestimmungen fest

In Bezug auf rheinländische Fusse

$$\text{CVII.}\quad c = 86 \,.\, \sqrt{\frac{w\zeta}{\lambda\chi}} \text{ als Min.}$$

$$\text{CVIII.}\quad c = 106 \,.\, \sqrt{\frac{w\zeta}{\lambda\chi}} \text{ als Max.}$$

§. 53.

Inzwischen treten beim Gebrauche der Chezyschen Formel *) doch einige wichtige Beschränkungen ein. Sie nimmt auf das Gefälle des Bodens gar keine Rücksicht, sondern blos auf den Abhang der Wasserfläche, welcher durch $\frac{\zeta}{\lambda}$ ausgedruckt wird. Sie setzt überdas unveränderliche Profile längs dem ganzen Kanale voraus, oder unveränderliche Werthe von $\frac{w}{\chi}$, und sie läßt sich daher auf Kanäle, bei welchen sich $\frac{w}{\chi}$ nach und nach merklich ändert, nicht so geradehin anwenden. Sie setzt längs dem Kanal Querschnitte voraus, die nicht merklich von der Kongruenz abweichen. Ebendarum ist sie auf horizontale Kanäle (Kanäle mit horizontalem Boden) ganz unanwendbar, weil wegen des bedungenen Parallelismus zwischen Wasserfläche und Boden bei solchen Kanälen auch $\frac{\zeta}{\lambda}$ folglich $c = 0$ seyn müßte. Auch ist sie ganz unanwendbar

*) Die Gestalt der Formel bleibt immer die Chezysche, wenn ich gleich die Werthe von ϕ nach meiner Ableitung und nach meiner Ansicht festsetze; daher ich sie auch immer so benenne.

auf Kanäle, bei welchen die Wassertiefe allmälig zunimmt wie z. B. bei Mühlgräben, in welchen das Wasser am Ende durch eine Schützenöffnung abfließt, und auf Kanäle, die allmälig breiter oder auch schmäler werden. Auf alle diese Mängel haben die besten französischen Ingenieurs nicht geachtet, selbst Dübüat und Prony nicht *).

§. 54.

Doch giebt es allerdings viele Fälle, wo die verschiedenen Wasserquerschnitte in einem Kanal so unbedeutend von einander abweichen, daß man ein gewisses mittleres Profil ohne Bedenken als unveränderliches Profil für die ganze Länge des Kanals beibehalten kann, wie dieses selbst die obigen Beobachtungen beweisen, bei welchen keineswegs allgemeine Kongruenz sämtlicher Querschnitte statt haben konnte.

Man denke sich ein solches mittleres Profil.

Seine mittlere Breite (die mittlere zwischen der Wasserfläche und dem Boden) sey $= b$

Seine Höhe oder Tiefe . . . . $= h$

so hat man nahe genug

$$\text{CIX.} \quad w = bh, \text{ und } \chi = b + 2h$$

Ich habe es für zweckmäßig gehalten, hiermit dem Chezyschen Ausdruck eine bestimmtere Form zu geben.

Man erhält hiernach

$$\text{CX.} \quad c = \phi \cdot \sqrt{\frac{\zeta \cdot bh}{\lambda \cdot (b + 2h)}}$$

*) Mögte es doch französischen Hydraulikern belieben, teutsch zu lernen, und sich dann mit der teutschen Literatur bekannt zu machen, um sich selbst überzeugen zu können, daß trotz der von Seiten teutscher Regierungen fehlenden Aufmunterung und Unterstützung die Hydraulik und Maschinenlehre in Teutschland auf einem höheren Standpunkte steht, als in Frankreich.

und die in 1 Sekunde abfliesende Wassermenge

$$\text{CXI.}\quad M = cw = \phi \,.\, bh \,.\, \sqrt{\frac{\zeta \,.\, bh}{\lambda \,.\, (b + 2h)}}$$

Den Werth von ϕ nimmt man, wo man wissen will, was sich wahrscheinlich erwarten läßt, aus CV oder CVI; wo man mit Sicherheit rechnen muß, aus CVII oder CVIII.

Auch erhält man hieraus zur Bestimmung der Werthe von h oder von b die kubischen Gleichungen

$$\text{CXII.}\quad h^3 - \frac{2M^2 \lambda}{\phi^2 \,.\, \zeta \,.\, b^3} \,.\, h = \frac{M^2 \,.\, \lambda}{\phi^2 \,.\, \zeta \,.\, b^2}$$

$$\text{CXIII.}\quad b^3 - \frac{M^2 \lambda}{\phi^2 \zeta h^3} \,.\, b = \frac{2M^2 \lambda}{\phi^2 \,.\, \zeta \,.\, h^2}$$

Auch erhält man λ oder ζ durch die Gleichungen

$$\text{CXIV.}\quad \lambda = \frac{\phi^2 b^3 h^3 \zeta}{(b + 2h) \,.\, M^2}$$

$$\text{CXV.}\quad \zeta = \frac{\lambda + (b + 2h) \,.\, M^2}{\phi^2 b^3 h^3}$$

B. Die Dübüatsche Formel für die Bewegung des Wassers in regulären offenen Kanälen.

§. 55.

Wir haben oben (§. 44.) gesehen, wie Dübüat bei seinen Untersuchungen über die Röhrenleitungen zu seiner transscendentischen Gleichung (XC) gelangen konnte. Ganz auf dieselbe Weise gelangt er zu der Formel für reguläre offene Kanäle

$$\text{XCVI.}\quad c = \frac{297 \,.\, (\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - \text{logn.}\, \sqrt{(b + 1{,}6)}} - 0{,}3 \,.\, (\sqrt{r} - 0{,}1)$$

wo also die Einschaltung des natürlichen Logarithmen weder eine vorangegangene Integration, noch irgend eine Analogie zum Grunde hat. Sie dient

ihm statt einer Mikrometerschraube, um sehr langsame Aenderungen des ganzen Ausdrucks bei schon merklichen Aenderungen von b zu bewirken.

Dabei beziehen sich übrigens alle Größen auf Pariser Zolle; r steht hier statt $\frac{w}{\chi}$, und $\frac{1}{b}$ statt $\frac{\zeta}{\lambda}$. Hierbei gelten aber ähnliche Bemerkungen wie §. 45. Es bedarf einer solchen Mikrometerschraube ganz und gar nicht. Auch treffen diese Formel dieselben Erinnerungen wie die Chezysche (§. 53.). In den ordentlichen Fällen ihrer Anwendbarkeit giebt sie überdas keine größere Genauigkeit als die Chezysche Formel, da überhaupt hier nur Näherungen zur Wahrheit verlangt werden können. Sie steht aber darin der Chezyschen weit einfacheren Formel nach, daß sie die Beantwortung der mannigfaltigen hieher gehörigen Fragen ungemein erschwert, ohne die Fehler der Chezyschen Formel zu beseitigen. Wir halten uns darum nicht länger bei diesem erkünstelten Formelbau auf.

C. Die Girardsche Formel für die Bewegung des Wassers in regulären offenen Kanälen.

§. 56.

Eine Abhandlung des berühmten Physikers Coulomb im J. 1800. im 3ten Bande aus der Klasse der physischen und mathematischen Schriften des Nationalinstituts gab dem dirigirenden Ingenieur beim Brücken = und Straßenbau, Girard, Veranlassung zu einem neuen Ausdruck für die Geschwindigkeit. Nach der Chezyschen Hypothese war $c^2 = \frac{2gw\zeta}{\beta\lambda\chi}$, oder $\frac{2gw\zeta}{\lambda\chi} = \beta c^2$. Girard hielt es der Sache angemessener, beide Potenzen der Geschwindigkeit in die allgemeine Formel zu bringen, und die Bestimmung des Ein=

flusses, den jede dieser Potenzen auf die Bewegung habe, aus Beobachtungen abzuleiten. Er setzt daher

$$\text{CXVII.}\quad \frac{2 g w \zeta}{\lambda \chi} = \beta . (c + c^2)$$

wo dann β die Zahl ist, welche man erst durch Beobachtungen bestimmen müßte. Man sieht wiederum ein, daß es gar nicht nöthig ist, die Größe g in die Formel einzuführen. Weil nämlich g und β unveränderliche Größen sind, so kann man schlechthin E statt $\frac{\beta}{2g}$ setzen; dieses giebt

$$\text{CXVIII.}\quad \frac{w \zeta}{\lambda \chi} = E . (c + c^2)$$

Prony sagt in seinen oben angeführten Récherches (S. 70. der Uebers.) in Bezug auf (CXVII), Girard habe das Verdienst, den Widerstand aus einem Gesichtspunkt betrachtet zu haben, welcher auf eine direkte und unmittelbare Weise die mathematische Theorie mit der gesunden Physik in Verbindung bringe. Eigentlich ist aber die Girardsche Formel so wenig aus der Theorie abgeleitet als die Chezysche; beide sind blos hypothetisch, aber auf Analogie gegründet. Doch ist für sich klar, daß die Girardsche allerdings der Natur der Sache angemessener sein müsse. Man sieht aber auch gleich beim ersten Anblik derselben, daß Girard den Zweck nicht ganz erreichen konnte, durch Einführung der beiden Potenzen von c aus Vergleichung mit Beobachtungen den verschiedenen Einfluß abzuleiten, den jede Potenz insbesondere auf die Bewegung habe. Er beschränkte zusehr den Ausdruck dadurch, daß er beiden Potenzen einen und denselben Koefficient gab, hiermit also schon ein bestimmtes Gesetz vorschrieb. Der Erfolg dieser Beschränkung zeigt sich auch in den Resultaten, nach welchen die Girardsche Formel für die Aus-

übung nichts beßeres giebt, als die Chezysche, die also wenigstens den für die Anwendung auf mannigfaltige hierher gehörige Berechnungen nicht unwichtigen Vorzug der größeren Einfachheit behält. Die übrigen Fehler hat sie mit der Chezyschen und Dübüatschen gemein.

D. Die Pronysche Formel für die Bewegung des Wassers in regulären offenen Kanälen.

§. 57.

Prony wollte in den oben angeführten Récherches eine Hypothese zum Grunde legen, wodurch die Formel weniger beschränkt würde, als die Girardsche. Er gab jeder der beiden Potenzen von c ihren eigenen Köefficient, und brachte sie so auf die nachstehende Form

$$\text{CXIX.} \quad \frac{w\zeta}{\lambda\chi} = \delta \cdot c + \mu \cdot c^2$$

Statt δ steht bei ihm $\frac{\alpha}{2g}$, und statt μ der Bruch $\frac{\beta}{2g}$. Dabei ist g = 4,9043975 Meter.

Aus umständlichen Vergleichungen mit Beobachtungen fand er $\alpha = 0{,}00093$ und $\beta = 0{,}00266$, alles in Bezug auf Meter. Die Auflösung der quadratischen Gleichung gab ihm in Bezug auf Meter

$$\text{CXX.} \quad c = -0{,}071852 + \sqrt{\left(0{,}00516275 + \frac{3232{,}96 \cdot w\zeta}{\lambda\chi}\right)}$$

Wird alles in Pariser Fussen ausgedruckt, so erhält man

$$\text{CXXI.} \quad c = 3{,}0795 \cdot \left[-0{,}07185 + \sqrt{\left(0{,}005162 + \frac{1050 \cdot w\zeta}{\lambda\chi}\right)}\right]$$

Prony hat hierbei Beobachtungen vom Kanale dü Jard und selbst vom Fluß de Hayne mit genommen, weil er hiermit der unmittelbaren Anwendung näher zu kommen glaubte. Weil aber dergleichen Anwendungen doch nur bei

regulären Kanälen gestattet sind, oder bei solchen, die nicht sehr von regulären abweichen, so hat er seinen Zweck verfehlt, indem die Resultate seiner Formel den oben angegebenen genaueren Beobachtungen keineswegs besser entsprechen, als die Resultate der so einfachen Chezyschen Formel CV oder CVI. Uebrigens hat auch die Pronysche Formel die (§. 53.) bemerkten Mängel.

E. Neueste Untersuchung zur Verallgemeinerung der Formel $M = \phi . bh. \sqrt{\frac{\zeta bh}{\lambda . (b + 2h)}}$ (CXI).

Erste Methode.

§. 58.

Der Ausdruck für die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in einem Kanale, dessen Wassertiefe oben bei γ (Fig. 2.) = h ist, und dessen Breitenprofile bis zum letzten in α so wenig von einander verschieden sind, daß man ohne Bedenken den mittleren Werth zwischen den beiden Profilen bei γ und α *) als unveränderliches Profil für den ganzen Kanal

*) Es versteht sich, daß weder γ der erste Anfang des Kanals noch α der Endpunkt desselben seyn darf. Es erfolgen nämlich allemal beim Einlassen des Wassers in den Kanal unordentliche Bewegungen, bevor der ordentliche Wasserspiegel mit wenigstens beinahe gleichförmiger Bewegung gebildet wird, da dann erst γ gedacht werden muß. Dann fängt auch schon in einiger Entfernung vom Ende des Kanals der Wasserspiegel merklich zu sinken an, so daß die Geschwindigkeit des Wassers merklich zunimmt, und es muß daher α in einer Entfernung vom Ende gedacht werden, wo diese merkliche Geschwindigkeitsänderuugen noch nicht eintreten, oder man muß solche bei Seite setzen.

zum Grunde legen kann, ist nach Chezy, befriedigend genug für die Ausübung,

$$c = \phi \sqrt{\frac{\zeta b h}{\lambda (b + 2h)}}$$

Wenigstens ist der Chezysche Ausdruck von diesem unmerklich verschieden, indem wir nur b + 2h statt χ gesetzt haben, und bh statt w, wo dann bh sich auf das Profil bei γ bezieht.

Wir nehmen nunmehr die Wassertiefe von γ bis α als stetig veränderlich an, bezeichnen sie als veränderliche Größe allgemein mit u, und suchen nunmehr für die ganze Länge des Kanals den mittleren Werth von $\frac{u}{b + 2u}$. Wird dieser mittlere Werth mit Σ bezeichnet, so setzen wir nunmehr

$$\text{CXXII.} \quad c = \phi \cdot \sqrt{\frac{\zeta b}{\lambda}} \cdot \Sigma$$

Anm. Bezeichnen wir den mittleren Werth von $\sqrt{\frac{u}{b+2u}}$ mit S, so müßten wir eigentlich $c = \phi \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\zeta b}{\lambda}}$ setzen. Da aber dieser Werth von dem CXXII sehr wenig verschieden ist, und von sehr scharfen Resultaten nicht die Rede seyn kann, solche auch in der Ausübung nicht nöthig sind, und der Ausdruck CXXII bei weitem einfacher ausfällt, so behalten wir CXXII bei.

§. 56.

$\gamma\alpha' = x$ (Fig. 3.) sey ein willkührlich abgeschnittenes Stück auf $\gamma\alpha$; $\gamma'\eta'$ die Wassertiefe u bei α'; $\delta\eta$ die Wasserfläche, und $\delta\nu$ der Bodenfläche $\gamma\alpha$ gleichlaufend.

Um nun Σ zu bestimmen, suchen wir zuerst einen allgemeinen Ausdruck zwischen x und u.

Weil es nun hier blos darum zu thun ist, für Σ einen Werth zu finden, welcher c, nach CXXII berechnet, nicht merklich verschieden von $c = \phi . S . \sqrt{\frac{\xi b}{\lambda}}$ giebt, so ist man hinlänglich berechtigt, zur Erleichterung der Berechnung hier die Oberfläche des Wassers von δ bis η als eine schiefe Ebene zu betrachten.

Hiernach hat man nun

$$\delta \eta' : \eta' t = \delta \eta : \eta \gamma$$

oder, $\delta \eta = \lambda$ gesetzt,

$$x : \eta' t = \lambda : (\delta \gamma - \alpha \eta) = \lambda : (h - H)$$

wo H die Wassertiefe bei α bezeichnet.

also

$$\eta' t = \frac{x . (h - H)}{\lambda}$$

Es ist aber $\alpha' \eta' = h - \eta' t = u$; demnach

$$\text{CXXIII.} \quad u = h - \frac{x . (h - H)}{\lambda}$$

und

$$b + 2u = b + 2h - \frac{2x . (h - H)}{\lambda}$$

Wir können also

$$\frac{h - \frac{(h - H) . x}{\lambda}}{b + 2h - \frac{2 (h - H) . x}{\lambda}} \text{ statt } \frac{u}{b + 2u}$$

schreiben.

Es sey nun allgemein der vorstehende Ausdruck zur Linken $= y$, so kann man sich statt der geraden $\gamma \alpha$ (Fig. 5.)

die $\gamma\alpha$ Fig. 4. denken, und auf dieser für jedes angenommene Stück $\gamma m = x$ sich ein Perpendikel $mn = y =$

$$\frac{h - \frac{(h - H) . x}{\lambda}}{b + 2h - \frac{2(h - H) . x}{\lambda}}$$ vorstellen.

Bilden nun die Endpunkte aller dieser Perpendikel eine Linie wie de (Fig. 4.), und bezeichnet man den Flächeninhalt der Figur $\gamma\alpha de$ mit Z, so ist

$$Z = \Sigma . \alpha\gamma = \Sigma . \lambda$$

weil Σ die mittlere Höhe der Fläche $\alpha\gamma de$ ist, und λ ihre Grundlinie. Demnach

$$\text{CXXIV.} \quad \Sigma = \frac{Z}{\lambda}$$

Hieraus giebt sich nun der allgemeine Werth von Σ.

§. 60.

Der Flächeninhalt eines unbestimmten Flächenstücks γmnd (Fig. 4.) sey $= E$, so ist seine mittlere Höhe $= \frac{E}{x}$; diese sey $= u'$, so hat man

$$u' = \frac{E}{x} = \frac{\int y dx}{x}$$

oder

$$\text{CXXV.} \quad u' = \frac{\int \left(\frac{h - \frac{(h - H) . x}{\lambda}}{b + 2h - \frac{2(h - H) . x}{\lambda}} \right) . dx}{x}$$

Setzt man zur Erleichterung der Integration $b + 2h - \frac{2(h - H) . x}{\lambda} = k$, so wird

$$x = \frac{-k + (b + 2h)}{2(h - H)} . \lambda$$

$$dx = \frac{-\lambda . dk}{2.(h - H)}$$

und

$$h - \frac{(h - H).x}{\lambda} = \frac{k - b}{2}$$

Demnach

$$u' = \int \frac{\frac{\left(\frac{k-b}{2}\right)}{k} . dx}{x} = -\frac{\int \left(\frac{k-b}{2k} . \frac{\lambda dk}{2.(h-H)}\right)}{x}$$

$$= \frac{\frac{-\lambda .}{4.(h - H)} . \int \frac{k - b}{k} . dk}{x}$$

oder

$$\text{CXXVI. } u' = \frac{-\frac{\lambda}{4(h-H)} . (k - b . \text{logn.}\, k + C)}{x}$$

wo C die Konstante ist.

Der Zähler dieses Ausdrucks giebt für jeden Werth von x die Fläche $\gamma m n d$, wenn man $x = \gamma m$ nimmt (Fig. 4.). Für $x = 0$ wird schlechthin $k = b + 2h$, und die Fläche wird $= 0$, also

$$-\frac{\lambda}{4(h - H)} . (b + 2h - b . \text{logn.}(b + 2h) + C = 0$$

Demnach

$$C = b . \text{logn.}\,(b + 2h) - (b + 2h).$$

Diesen Werth statt C (in CXXVI) gebraucht, giebt

$$u' = \frac{-\frac{\lambda}{4(h-H)}.(k - b.\,\mathrm{logn}.\,k + b.\,\mathrm{ln}.\,(b+2h) - (b+2h))}{x}$$

Derjenige Werth von u', welcher = λ ist, wurde oben mit Σ bezeichnet; für diesen Fall ist aber

$$k = b + 2h - \frac{2(h-H).\lambda}{\lambda} = b + 2H$$

und daher

$$\text{CXXVII.}\quad \Sigma = -\frac{\lambda}{4.(h-H)}.\frac{2(H-h) - b.(\mathrm{ln}.(b+2H) - \mathrm{ln}.(b+2h))}{\lambda}$$

oder auch

$$\text{CXXVIII.}\quad \Sigma = \tfrac{1}{2} - \frac{b}{4(h-H)}.(\mathrm{ln}.(b-2h) - \mathrm{ln}.(b+2H))$$

§. 61.

Nunmehr erhält man aus (CXXII)

$$\text{CXXIX.}\quad c = \phi.\sqrt{\frac{\zeta b}{\lambda}}.\left[0{,}5 - \frac{b}{4(h-H)}.(\mathrm{ln}.(b+2h) - \mathrm{ln}.(b+2H))\right]$$

Man denke sich durch α (Fig. 3.) die αs der ηδ parallel gezogen, so ist der kub. Inhalt der Wassermasse αsδη = H.b.λ; dieser kommt das Gefälle ε + h − H, wo ε das Gefälle des Bodens bezeichnet, ganz zu. Die wirklich abfließende Wassermasse ist aber für jeden Augenblik $= \frac{H+h}{2}.b.\lambda$; Wir setzen daher für die gesammte Wassermasse im Kanale das Gefälle

$$= \frac{H . b . \lambda}{\frac{H + h}{2} . b . \lambda} . (\varepsilon + h - H)$$

oder

$$\text{CXXX.} \quad \zeta = \frac{2H . (\varepsilon + h - H)}{H + h}$$

Dieses giebt nun

$$\text{CXXXI.} \quad M = \phi . bh . \sqrt{\left(\frac{bH . (\varepsilon + h - H)}{\lambda (H + h)} . \left(1 - b . \frac{\ln. (b + 2h) - \ln. (b + 2H)}{2 . (h - H)}\right)\right)}$$

wo man ϕ wie in CXI nimmt.

§. 62.

Für $h = H$ hat man die Bedingung, für welche die Chezysche Formel gilt; es verwandelt sich aber für diese Voraussetzung der 2te Faktor unter dem Wurzelzeichen (in CXXXI) in $1 - b . \frac{0}{0}$, welches eine unbestimmte Größe ist.

Zur Erläuterung und hiermit zugleich zur Bestättigung unserer Formel dient folgendes.

Behandlen wir h als veränderlich, so ist für die Voraussetzung, daß $h = H$ werde,

$$\ln. (b + 2h) - \ln. (b + 2H) = d \ln. (b + 2h)$$

$$= \frac{2 . dh}{b + 2h} = \frac{2 . (h - H)}{b + 2h}$$

also

$$z = \tfrac{1}{2} - \frac{b}{4 . (h - H)} . \frac{2 . (h - H)}{b + 2h}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}b + h - \tfrac{1}{2}b}{b + 2h} = \frac{h}{b + 2h}$$

wie es der Chezyschen Grundformel gemäß ist.

§. 63.

Für Fälle, wo der Gebrauch der einfachen Grundformel nicht statt hat, muß nun die Gleichung CXXXI in ihrer transscendentischen Form gebraucht werden. Das Vertrauen auf ihre Anwendbarkeit ist eine Folge von der erkannten Anwendbarkeit der Chezyschen Formel, auf die sie gebaut ist. Ihr allgemeiner Gebrauch in einer Menge von Fällen, welche in der Ausübung vorkommen, und in welchen alle bisherige Formeln unanwendbar sind, entschädigt hinlänglich gegen ihre aus einem strengen Kalkul unvermeidlich hervortretende transscendentische Form, welche uns bei ihrer Anwendung zu mehrmaligen Proberechnungen nöthigt, die wir uns aber auch bei höheren Gleichungen gefallen lassen müssen.

Uebrigens sind in Ansehung ihres Gebrauchs noch einige wichtige Bemerkungen zu machen.

§. 64.

Werden uns Bestimmungsgrößen von einem wirklich vorhandenen Kanal gegeben, um aus solchen irgend ein noch unbekanntes Stück z. B. M zu berechnen, so läßt sich die Formel CXXXI dazu wie gewöhnlich gebrauchen. Sie giebt nämlich ε, λ und M wie aus einer algebraischen Gleichung, indem sie nur in Bezug auf b, H und h transscendentisch ist. Würde eine dieser 3 letzteren Größen gesucht, so müßten Proberechnungen zu Hülfe genommen werden.

§. 65.

Ganz anders verhält es sich, wenn von Kanälen die Rede ist, welche erst noch angelegt werden sollen. Wenn die Größen b, λ, M und h festgesetzt worden sind, wie sie bei einem neu anzulegenden Kanale statt finden sollen, so

läßt sich nicht so geradehin auch H nach belieben festsetzen, indem der zu einem bestimmten Werthe von h gehörige Werth von H durch die beim fließendem Wasser eintretenden Gesetze der Bewegung schon bestimmt seyn kann.

In dieser Hinsicht muß man hier freien Lauf des Wassers und gehinderten oder gehemmten Lauf von einander unterscheiden. Ersterer trit nur da ein, wo das Wasser am Ende eines Kanals nach der ganzen Breite und Tiefe desselben ungehindert, also ohne an einen Damm oder an ein Schutzbrett anzustoßen, herabstürzt z. B. auf ein Wasserrad.

Man denke sich nach der ganzen Breite desselben eine Fallschütze angebracht. Je höher diese aufgezogen wird, desto tiefer muß der Wasserspiegel sinken. Das hiermit verbundene Abnehmen von H kann aber nicht länger fortdauern, als bis endlich das Wasser den unteren Rand der aufgezogenen Fallschütze gar nicht mehr berührt, also ganz frei unter derselben abschließt.

Wird daher für freien Lauf bei einem anzulegenden Kanale M gesucht, so muß zugleich H als gesuchte Größe betrachtet werden, indem H und M zugleich durch die übrigen Bestimmungsgrößen b, h, ε und λ bestimmt werden. Es gehört nämlich zu bestimmten Werthen von b, h, ε und λ bei freiem Laufe offenbar derjenige Werth von H, für welchen die Formel CXXXI den größten Werth von M giebt. Zu diesem Maximum von M gehört dann zugleich das Minimum von H.

Sind also b, h, ε und λ bei Voraussetzung eines freien Laufs gegeben, so muß man mittelst mehrerer Proberechnungen nach abnehmenden Werthen von H zunehmende von M mittelst CXXXI berechnen, bis man auf den größten von M kommt, da dann das zusammengehörige Min. von H und Max. von M die gesuchten Werthe von H und M sind.

§. 66.

Höchst selten ist aber von freiem Laufe die Rede. In solchen Fällen nun, wo solcher nicht bedungen ist, kann um M zu finden, außer b, h, ε und λ auch H vorgeschrieben werden, doch finden für H gewisse Gränzen statt, unter welche H nicht fallen darf. Es darf nämlich H nicht kleiner verlangt werden, als es bei denselben Bestimmungsstücken selbst für freien Lauf des Wassers seyn müßte. Wenn also gleich der allgemeinen Gleichung CXXXI durch irgend einen Werth von H arithmetisch Genüge geschieht, so folgt doch hieraus noch nicht sogleich, daß ihr dieser Werth auch physisch entspreche.

Zur Entscheidung dient nun folgendes:

A) Weiß man zum voraus, daß bei bestimmten Werthen von b, h, ε, λ und H kein freier Lauf möglich ist, so giebt CXXXI geradezu den Werth von M, so daß das Resultat keiner weiteren Prüfung bedarf.

B) In allen übrigen Fällen muß das Resultat der Formel erst geprüft werden. Bezeichnen wir das Minimum von H mit $H^{(k)}$, wozu nämlich das Maximum von M gehört, so muß die Berechnung bis zu $H^{(k)}$ fortgesetzt werden, um hiermit den kleinst möglichen physischen Werth von H zu finden. Findet man nun $H^{(k)}$ kleiner als den gegebenen Werth von H, so ist der aus b, h, ε, λ und H gefundene Werth von M der richtige; er giebt zu erkennen, daß durch verhinderten Lauf (z. B. durch eine Fallschütze) der Forderung Genüge geschehen könne.

C) Soll durch versperrten Lauf der Forderung Genüge geschehen können, so muß nothwendig $H > h$ seyn. Daraus folgt aber keineswegs, daß ein für $H > h$ aus (CXXXI) gefundener Werth von M geradezu

gebraucht werden könne. Man könnte nämlich bei der Proberechnung einen Werth von H gebraucht haben, welcher $> h$ zugleich aber auch $< H^{(k)}$ wäre. In diesem Falle kann der gefundene Werth von M nicht gebraucht werden, weil ein Werth $H < H^{(k)}$ physisch unmöglich ist. Es kann also in diesem Falle der angenommene Werth von H nicht zugleich mit den übrigen Bestimmungsstücken bestehen. Man darf nunmehr nur einen solchen Werth von H setzen, der größer als $H^{(k)}$ ist, so erhält man einen richtigen Werth für M.

D) Ist aber der angenommene Werth von $H > h$ und zugleich $H > H^{(k)}$, welches letztere sich in vielen Fällen leicht ohne weitere Berechnung übersehen läßt, so giebt unsere Formel sogleich den richtigen Werth von M.

E) Ist unter den vorgeschriebenen Bestimmungsstücken $\iota + h = H$, oder sogar $\iota + h < H$, so ist kein Abfluß möglich, und es wäre eine ganz vergebliche Arbeit, für einen solchen Fall den Werth von M berechnen zu wollen.

F) In solchen Fällen kann die Chezysche Formel zur beiläufigen Bestimmung der gesuchten Größe gebraucht werden, so daß man dann nach CXXXI weitere Proberechnungen darauf gründen kann.

§. 67.

Eine der wichtigsten hierher gehörigen Fragen ist die, wie breit man einen Graben machen müsse, um bei sonst gegebenen Abmessungen eine verlangte Wassermenge M in jeder Sekunde ableiten zu können? Wir setzen für diesen Fall aus (CXXXI)

$$\frac{\lambda M^2}{\phi^2 h^2} = \frac{b^3 H. (\varepsilon + h - H)}{H + h}. \left(1 - b. \frac{\ln. (b + 2h) - \ln. (b + 2H)}{2. (h - H)}\right)$$

oder

$$\text{CXXXII.} \quad \frac{\lambda. (H + h). M^2}{\phi^2 h^2 H. (\varepsilon + h - H)} = b^3. \left(1 - b. \frac{\ln. (b + 2h) - \ln. (b + 2H)}{2. (h - H)}\right)$$

Bezeichnen wir nun den Ausdruck zur Rechten in dieser Gleichung mit A, so muß man b so nehmen, daß

$$\text{CXXXIII.} \quad A = \frac{\lambda. (H + h). M^2}{\phi^2. h^2. (\varepsilon + h - H). H}$$

werde.

Ex. Es sey in Pariser Fussen $\lambda = 12000$, $\varepsilon = 1$, $h = 10$, $H = 10,6$ und $M = 4000$ Kubik Fuß. Nimmt man nun $\phi = 83$ (statt 86 in CVII), so soll b hiernach bestimmt, also b so genommen werden, daß $A = \frac{12000. 20,6. 16000000}{6889. 100. 10,6. 0,4} = 1422557$ werde.

Hier hätte man zum Gebrauch der Formel (CXIII) $\zeta = h + \varepsilon - H = 0,4'$; also

$$b^3 - \frac{16000000. 12000}{83^2. 0,4. 1000}. b = 20. \frac{16000000. 12000}{83^2. 0,4. 1000}$$

oder

$$b^3 - 54008. b = 1080160 \quad (\text{G}$$

Für b = 300 wird

$$b^3 - 54008. b = 10797600$$

b = 250 giebt

$$b^3 - 54008. b = 2123000$$

b = 240 giebt

$$b^3 - 54008. b = 862080$$

Es muß also b zwischen 240 und 250 fallen.

$b = 245$ giebt

$$b^3 - 54008 \cdot b = 1474165$$

$b = 242$ giebt

$$b^3 - 54008 \cdot b = 1102552$$

Die Vergleichung mit (C) zeigt, daß $b = 242$ die nächste ganze Zahl ist, welche die Chezysche Grundformel giebt.

Wenn nun gleich hier die Wassertiefe auf die Länge von 1000′ sich nur um 0,05′ = 0,6″ ändert, also die Abweichung der Wasserfläche von dem Parallelismus mit der Bodenfläche gewiß sehr gering ist, so giebt unsere Formel doch schon einen merklich größeren Werth für b. Nämlich

$$b = 262 \text{ giebt } A = 1311061$$
$$b = 266 \text{ — } A = 1356813$$
$$b = 270 \text{ — } A = 1399437$$

Da nun $A = 1422557$ werden soll, so ergiebt der Fortgang der vorstehenden Werthe, daß b zwischen 270 und 273 fallen müsse. Wir nehmen daher hier $b = 273'$.

Anm. Die Chezysche Grundformel bestimmt b blos aus den Werthen von ζ, λ, h und M. Sie setzt stillschweigend $H = h$ und daher auch $\varepsilon = \zeta$ und freien Abfluß voraus. Darum giebt sie auch b kleiner.

§. 68.

Unsere Formel (CXXXI) behält ihre Anwendbarkeit für jede Lage des Kanalbodens. Für Kanäle mit horizontalem Boden setzt man $\varepsilon = 0$, und für Kanäle mit steigendem Boden wird der Werth von ε verneint ausgedruckt.

§. 69.

Leidet die mittlere Profilbreite vom Anfange des Kanals bis zum Ende desselben gleichförmige Ab- oder Zunahme, so

bedarf unsere Formel noch einer allgemeineren Form, und wir gelangen auf eine ähnliche Weise zu der folgenden:

$$\text{CXXXIII.}\quad \frac{M^2\,\lambda}{\phi^2 .\, b.\, h} = (\iota + h - H) . \left\{ \begin{array}{l} (h-H).\, b + \frac{B-b}{N} . \left(H + (h-H) . \frac{N - 2(b+2H)}{2N}\right) \\ + \left[\frac{bH}{N} - \frac{(B-b).\, H + (h-H).\, b}{N^2} . (b+2H) \right. \\ \left. + \frac{(B-b).(h-H).(b+2H)^2}{N^3} \right] \times \\ \left(\text{logn.}\,(B+2h) - \text{ln.}\,(b+2H)\right) \end{array} \right\}$$

Dabei ist b die mittlere Profilbreite am Anfange des Kanals, und B die mittlere Breite des Profils am Ende desselben; auch ist $N = B - b + 2(h - H)$. Setzt man ζ statt ι, $B = b$, und $H = h$, so kehrt diese Formel, wie sich gehört zu der ursprünglichen Chezyschen zurück.

Zweite Methode.

§. 70.

Durch eine zweite Methode bin ich auf zwei verschiedenen Wegen noch zu nachstehenden von CXXXI der Form nach sehr verschiedenen allgemeinen Gleichungen gelangt

$$\text{CXXXIV. } M = \frac{\phi b}{4} \cdot \sqrt{\left[\frac{2\varepsilon(h+H)^3}{b+h+H} + \frac{(b+2h)^3-(b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2}\Big((b+2h)^2-(b+2H)^2\Big) + 6 . b^2 . (h-H) - b^3 . \Big(\ln.(b+2h)-\ln.(b+2H)\Big)\right] . \frac{b}{\lambda}}$$

und

$$\text{CXXXV. } M = \frac{\phi b}{4} . \left(\frac{h}{h+\varepsilon}\right)^{\frac{3}{4}} . \sqrt{\left[\frac{(b+2h+2\varepsilon)^3}{3} - \frac{(b+2H)^3}{3} - \frac{3b}{2} . \Big((b+2h+2\varepsilon)^2 - (b+2H)^2\Big) + 6 . b^2 . (h+\varepsilon-H) - b^3 . \Big(\ln.(b+2h+2\varepsilon)-\ln.(b+2H)\Big)\right] . \frac{b}{\lambda}}$$

In Bezug auf die Bestimmung von M ist es ziemlich gleichgültig, welche von den Formeln CXXXI, CXXXIV, CXXXV man gebrauchen will. Eine schon etwas merkliche Aenderung im Werthe von H ändert weit weniger bemerkbar den Werth von M. Ebendarum können die Werthe von M durch die verschiedenen Formeln weniger verschieden gefunden werden, als die von H. Wenn es nun darauf ankäme, den Werth von H so genau anzugeben, als es nach Untersuchungen der Art geschehen kann, so würde ich zu diesem Zwecke die Formel CXXXIV vorziehen, weil sie mit der

wahren Gestalt der Wasserfläche in engerer Verbindung steht, als die anderen.

§. 71.

Legt man statt der Chezyschen Formel die Pronysche zum Grunde, so erhält man statt CXXXI

CXXXVI. $M =$

$$3{,}187 . bh. \left[-0{,}07 + \sqrt{\left(0{,}0049 + 1014 . \frac{\varepsilon + h - H}{\lambda} . \frac{Hb}{H+h} \times \left(1 - b . \frac{\ln.(b+2h) - \ln.(b+2H)}{2(h-H)} \right) \right)} \right]$$

Anm. Was ich hier (§. 58 — 71.) nur in der Kürze mitgetheilt habe, findet man in der Abhandlung der königl. Akad. d. W. zu München für das J. 1812 von mir weitläuftiger und mit vielen und mannigfaltigen Anwendungen auf 123 Seiten in gr. 4. aus einander gesetzt.

Viertes Kapitel.

Vom Gebrauch der Trägheitsmomente.

§. 72.

Die Trägheitsmomente sind als Grundlage der schon so alten Pendellehre längst bekannt; ihr Gebrauch war aber, wie die Schriften von Euler, Kästner und Karsten und die der besten französischen mathematischen Schriftsteller hinlänglich beweisen, immer sehr beschränkt. Man wandt sie nur bei festen Körpern, aber auch bei solchen nur auf eine sehr beschränkte Weise an, so daß die Maschinenlehre gar keinen Vortheil daraus zog. In Bezug auf flüßige Massen nahm man seine Zuflucht zur Differential- und Integralrechnung, und wand sich auf diese Weise durch eine Menge von Verwickelungen hindurch, wo man auf weit kürzerem und leichterem Wege und auf eine lichtvollere Weise durch gehörige Anwendung der Trägheitsmomente hätte zum Zwecke kommen können. Ich habe schon in früheren Schriften nicht nur den allgemeineren Gebrauch dieser Momente in Bezug auf feste Körper bei Maschinen gezeigt, sondern auch die Anwendung derselben auf flüßige Körper zum größten Vortheile der Maschinenlehre in die Mechanik eingeführt. Ein Beispiel von letzterer giebt die Note zu §. 43, wo die nach der Lehre von den Trägheitsmomenten auf die Stelle des Kolbens reducirte Masse des Wassers in der Steigröhre durch

$\frac{W}{w} \cdot \lambda W$ ausgedruckt wird, so daß man hiermit sogleich

$$f = \frac{P - (H + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot v) \cdot W}{\mathfrak{P} + \frac{W}{w} \cdot \lambda W}$$ findet.

Setzt man Fälle voraus, in welchen $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot v$ in Vergleichung mit H bei Seite gesetzt werden könnte, so hätte man

$$f = \frac{P - HW}{\mathfrak{P} + \frac{W}{w} \cdot \lambda W}$$

Setzt man auch noch $\mathfrak{P}$ bei Seite, so wird

$$f = \frac{P - HW}{\frac{W}{w} \cdot \lambda W} = \frac{(P - HW) \cdot w}{\lambda W^2}$$

Ist b die Tiefe, welche der Kolben bei einem Schube in der Zeit t durchlauft, so hat man $t^2 = \frac{b}{fg}$ (oben III.) $= \frac{b \cdot \lambda W^2}{(P - HW) \cdot gw}$, also $P = \left(H + \frac{b \lambda W}{t^2 g w}\right) \cdot W$. welches die Eulersche Formel für Druckwerke ist. Bezeichnet nämlich t die Zeit eines ganzen Kolbenspiels bei einem doppelten Druckwerk von einerlei Abmessungen, so hat man mit obigen Schriftstellern $P = \left(H + \frac{4 b \lambda W}{t^2 g w}\right) \cdot W$. Sie bedürfen aber solcher Schüler, die sich mit der Integralrechnung schon ziemlich vertraut gemacht haben; sie erschweren die ganze Untersuchung, suchen in der Ferne, was nahe vor ihnen liegt und kommen endlich auf ungeheurem Umwege so auf jene Formel, daß man die einfachen mechanischen Gesetze fallender Körper, aus welchen sie vorhin so leicht abgeleitet worden ist, dabei ganz aus dem Gesichte verliehrt.

Am Ende ist aber überhaupt mit dieser Formel wenig gewonnen. Die Größe (A + B). v läßt sich keineswegs so geradehin bei Seite setzen; sie kann in vielen Fällen sehr bedeutend werden; ihr Mangel ist daher ein wesentlicher Fehler. Noch weniger kann die Größe P in der Gleichung fehlen, da der Druckkolben, wenn die Maschine durch ein Wasserrad betrieben wird, mit einer bedeutenden Masse in Verbindung steht. Wie nun nicht blos bei Druckwerken, sondern bei Maschinen überhaupt der Einfluß von der Masse des Wasserrades und anderer in Bewegung gesetzten Maschinentheile auf den Gang der Maschine bestimmt werden könne, hatte weder ein teutscher noch sonst ein Schriftsteller des Auslandes angegeben. Alle diese Lehren, wohin auch die Theorie des Krummzapfens und die der Schwungräder gehört, beruhen auf dem richtigen Gebrauch der Trägheitsmomente. Sie begründen zugleich die die verschiedenen Theorieen der ungleichförmig wirkenden Maschinen. Diesem Mangel habe ich durch frühere Schriften zum Theil schon abzuhelfen gesucht. In den folgenden Kapiteln werde ich hierüber nicht nur nähere Aufklärungen mittheilen, sondern auch noch einige Erweiterungen beifügen, die man in meinen früheren Schriften nicht findet, die aber für die praktische Mechanik wichtig sind. Weil aber diese Schrift vorzüglich für diejenigen bestimmt seyn soll, welche die Mathematik um der Ausübung willen studiren, so schalte ich für Solche das nachstehende Kapitel ein, von welchem ich auch in der Folge Gebrauch machen werde.

Fünftes Kapitel.

Einige Bemerkungen über Wasserräder und Vorgelege.

§. 73.

Die Höhe des Wassers über der Fläche der Schützenschwelle vor der Fallschütze heißt der Wasserstand; die lothrecht gemessene Höhe von Schützenschwelle herab bis zum Mittelpunkt der untersten Schaufel das lebendige Gefälle. Die ganze Wasserhöhe, die des Wasserstandes und das lebendige Gefälle zusammengenommen denken wir uns aus zwei Theilen zusammengesetzt; den oberen bis zu einer gewissen Gränze herab nennen wir die Stoßhöhe, den unteren die Druckhöhe. Wir setzen ein unterschlächtiges Rad in einem Kropfgerinne mit schief gestellten Schaufeln voraus. Die durch den Mittelpunkt aller Schaufeln laufende Kreislinie, deren Mittelpunkt in des Rades Axe liegt, ist des Rades mechanischer Umfang, der zugehörige Halbmesser der mechanische Halbmesser. Der Theil des mechanischen Umfangs, welcher im Kropfgerinne zur Druckhöhe gehört, ist der wasserhaltige Bogen.

Den mechanischen Halbmesser setzen wir . . . = R
Den wasserhaltigen Bogen in Graden . . . = α
Die Anzahl aller Schaufeln am Rade . . . = B
Die Anzahl der Schaufeln im wasserhaltigen Bogen = b
Die Geschwindigkeit des Rades im mech. Umfange = c

Die in 1 Sek. auf das Rad fallende Wassermenge $=$ M
Die Zeit, in welcher das Rad einen Umgang macht $=$ T
Die Druckhöhe, Höhe des wasserhaltigen Bogens $=$ a
Die Stoßhöhe . . . . $=$ h
Die Kraft, mit welcher das Wasser im wasserhaltigen Bogen am mechanischen Umfange wirkt . $= p'$
Die, mit welcher das Wasser vermöge des Stosses am Umfange wirkt . . . . $= p''$
Die Summe $p' + p''$ . . . . $=$ p

Ist das Wasserrad mit einem Vorgelege verbunden, so setzen wir für ein doppeltes Vorgelege:

Die Geschwindigkeit eines Triebstocks am 2ten Trill. $=$ C
Die Geschwindigkeit vom mechanischen Umfange des Wasserrades . . . . $=$ c
Die Anzahl Kämme am ersten angreifenden Rade $=$ N
Die am zweiten . . . . $= N'$
Die Anzahl Triebstöcke am 1ten Trilling . . $=$ n
Die am 2ten . . . . $= n'$
Den mechanischen Halbmesser des letzten Trillings $=$ r
Die Entfernung der mit der letzten Welle verbundenen Last von der Axe dieser Welle . . . $=$ R
Die Größe der auf diese Entfernung gebrachten Last $=$ W
Ihre Größe auf die Entfernung r gebracht . . $=$ Q

Hiernach hat man nun

$$\text{CXXXVII.} \quad T = \frac{3{,}14 \cdot 2R}{c}$$

In dieser Zeit stürzt auf sämtliche Schaufeln eine Wassermenge $T \cdot M = \frac{6{,}28 \cdot R}{c} \cdot M$, also auf eine einzelne Schaufel die Wassermenge $= \frac{6{,}28 \cdot R \cdot \frac{M}{c}}{B}$; demnach

$$\text{CXXXVIII.}\quad \left.\begin{array}{l}\text{Wassermenge im was-}\\ \text{serhaltigen Bogen}\end{array}\right\} = \frac{6,28 \,.\, R \,.\, \frac{M}{c}}{B} \,.\, b$$

Wir können aber auch $\frac{\alpha}{360}$ statt $\frac{b}{B}$ schreiben. Dieses giebt,

$$\text{CXXXIX.}\quad \left.\begin{array}{l}\text{Wassermenge im was-}\\ \text{serhaltigen Bogen}\end{array}\right\} = \frac{\alpha}{360} \,.\, 6,28 \,.\, R \,.\, \frac{M}{c}$$

Diese Wassermasse ist als Stück eines Wasserrings zu betrachten, dessen Bogenlänge nach der Mittellinie gemessen $= \frac{\alpha}{360} \,.\, 6,28 \,.\, R$, und dessen Dicke oder Grundfläche $= \frac{M}{c}$ wäre. Sie wirkt so, als ob sie durch keine Schiedwände abgesondert immer nur durch die Grundfläche $\frac{M}{c}$ unterstützt wäre. Wir haben daher

$$\text{CXL.}\quad p' = a \,.\, \frac{M}{c}$$

Der vom Stoß bei der Stoßhöhe h herrührende Druck läßt sich nicht mit gleicher Genauigkeit bestimmen. Wir werden die nähere Untersuchung hierüber nachholen. Für die meisten Fälle, und gewiß für alle wo $a >$ oder doch $= h$ ist, genügt es, in der Ausübung

$$\text{CXLI.}\quad p'' = \tfrac{1}{3} h \,.\, \frac{M}{c}$$

zu setzen. Demnach

$$\text{CXLII.}\quad p = (a + \tfrac{1}{3} h) \,.\, \frac{M}{c}$$

Es kommt nur noch darauf an, a und h zu bestimmen. Die Theorie giebt uns dafür keine scharfe Bestimmung. Wir können aber nicht bedeutend fehlen, wenn wir die mittlere Gränze der Stoßhöhe h von der Oberfläche des Wassers

herab bis $\frac{1}{2}$ Fuß tief unter die Schwelle der Fallschütze annehmen, indem wir voraussetzen oder fordern müssen, daß das Rad nahe genug an die Fallschütze gerückt wird. Wir erhalten also den Werth von a, indem wir $\frac{1'}{2}$ vom ganzen lebendigen Gefälle abziehen.

§. 74.

In Bezug auf das Vorgelege hat man

$$\text{CXLIII.}\quad \begin{cases} C = \dfrac{N}{n} \cdot \dfrac{N'}{n'} \cdot \dfrac{r}{R} \cdot c \\[2ex] c = \dfrac{n}{N} \cdot \dfrac{n'}{N'} \cdot \dfrac{R}{r} \cdot C \end{cases}$$

$$\text{CXLIV.}\quad \begin{cases} \dfrac{C}{c} = \dfrac{N}{n} \cdot \dfrac{N'}{n'} \cdot \dfrac{r}{R} \\[2ex] \dfrac{c}{C} = \dfrac{n}{N} \cdot \dfrac{n'}{N'} \cdot \dfrac{R}{r} \end{cases}$$

Der Widerstand am mechanischen Umfang des letzten Trillings sey $= Q$, so ist bei gleichförmig wirkenden Maschinen, (die dem Wasserrade einen gleichförmigen Gang gestatten) für die Bedingung des Gleichgewichts zwischen Kraft und Last (auch beim Umlaufen des nur vermöge der Trägheit in Bewegung bleibenden Wasserrades)

$$C : c = p : Q$$

also

$$\text{CXLV.}\quad \begin{cases} p = \dfrac{C}{c} \cdot Q = \dfrac{N \cdot N' \cdot r}{n \cdot n' \cdot R} \cdot Q \\[2ex] Q = \dfrac{n \cdot n' \cdot R}{N \cdot N' \cdot r} \end{cases}$$

Weil aber mit dem Eingreifen eines verzahnten Rades in den zugeordneten Trilling allemal schiefer Druck verbunden ist, so daß die angewendete Kraft nicht ganz auf Umdrehungsbewegung verwendet wird, auch Reibung an den Trieb=

strecken eintrit, so multiplicirt Belidor die ohne Rücksicht auf diese Erscheinungen erforderliche Kraft noch für jeden Trilling mit $\frac{19}{18}$, also bei 2 Trillingen mit $\left(\frac{19}{18}\right)^2$, welches auch die meisten Schriftsteller so beibehalten haben, weil Belidor in Rücksicht auf praktische Kenntnisse allerdings vorzüglich Anspruch auf Achtung und Vertrauen machen kann. Inzwischen ist diese Belidorsche Bestimmung doch nicht von der Art, daß sie bei der großen Verschiedenheit von Fällen so geradehin beibehalten werden kann. Theoretische Untersuchungen, wie ich sie an mehreren Orten selbst angestellt habe, leiten auf weitläuftige Ausdrücke, die den Praktiker von ihrem Gebrauche abschrecken, und die im Grunde doch immer nur Näherungsrechnungen bleiben, da in den meisten Fällen der Ausübung die Nutzlast selbst nur als beiläufig angegeben werden kann, und der Reibungskoefficient ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ des Drucks) allemal nur eine beiläufige Zahl ist. Nimmt man noch hinzu, wie wenig bei hydraulischen Maschinen die Größe der wirkenden Kraft rein theoretisch und mit mathematischer Genauigkeit angegeben werden kann, so bleibt es am Ende nur reine Pedanterie, gewisse Nebenbestimmungen durch weitläuftige Ausdrücke, die dem Ganzen einen Anschein von gründlicher Untersuchung geben sollen, angeben zu wollen, wodurch oft das gegenseitige Verhalten der verschiedenen Bestimmungsgrößen gegen einander so verwickelt wird, daß man zur Bestimmung irgend eines einzelnen Stücks aus den übrigen, statt eine solche allgemeine Formel zum Grunde legen zu können, jedesmal wieder einer neuen Untersuchung bedürfte. Ebendarum haben auch pedantische Mathematiker dem Gebrauch der Mathematik offenbar geschadet, und hiermit das ziemlich allgemeine Vorurtheil begründet, daß man zur Anlage guter Maschinen und zur Bestimmung der dabei vor=

kommenden Größen der Mathematik, wenigstens ihrer tiefe- ren Untersuchungen, nicht bedürfe.

Rein-mathematische und physisch-mathematische Untersuchungen besonders in Anwendungen auf hydraulische Gegenstände und auf zusammengesetzte Maschinen zum Bedürfnisse des menschlichen Lebens sind ihrer Begründung und ihrem Zwecke nach so sehr von einander verschieden, daß vielmehr bei letzteren der Mathematiker sich bis zu gewissen Gränzen zu verläugnen im Stande seyn muß. Er behält bei dem allem noch hinlänglich weites Feld, dessen Bearbeitung auf seinen Scharfsinn und auf zweckmäßige Anwendung rein-mathematischer Kenntnisse Anspruch macht. Eben diesen Gesichtspunkt darf man auch beim Lesen dieser Schrift zur Beurtheilung ihres Gehalts im Ganzen und im Einzelnen nie außer Acht lassen.

Um nun unsere Ausdrücke (CXLV) den Erscheinungen, welche beim Vorgelege eintreten, anpassender zu machen, und zugleich, welches Belidor versehen hat, auf die Verschiedenheit der Vorgelege einige Rücksicht zu nehmen, setzen wir für die Ausübung

$$\text{CXLVI.}\quad \begin{cases} P = \dfrac{N\,.\,N'\,.\,r}{(n-1)\,.\,(n'-1)\,.\,R}\,.\,Q \\[2ex] Q = \dfrac{(n-1)\,.\,(n'-1)\,.\,R}{N\,.\,N'\,.\,r}\,.\,P \end{cases}$$

Wäre ein 3faches Vorgelege vorhanden, welches höchst selten vorkommt, und wo möglich vermieden werden muß, so kämen noch die Faktoren $n'' - 1$ und N'' hinzu. Bei einem einfachen Vorgelege fallen $n' - 1$ und N' weg.

§. 75.

Je schneller bei einem bestimmten Wasserzuflusse das Wasserrad herumläuft, desto weniger Wasser können die ein-

zelnen Schaufeln auffangen, und desto kleiner muß also p ausfallen. Allemal muß ein Wasserrad, das eines gleichförmigen Beharrungsstandes fähig ist, diejenige Geschwindigkeit annehmen, bei welcher $p = \frac{N . N' . r}{(n-1).(n'-1).R} . Q$ wird.

Man hat nun ferner $Q = \frac{\mathfrak{R}}{r} . W$

Also aus (CXLVI)

$$\text{CXLVII.} \begin{cases} p = \frac{N . N' . \mathfrak{R}}{(n-1).(n'-1).R} . W \\ W = \frac{(n-1).(n'-1).R}{N . N' . \mathfrak{R}} . p \end{cases}$$

Aus CXLII und CXLVII wird nun

$$\frac{N . N' . \mathfrak{R}}{(n-1).(n'-1).R} . W = (a + \tfrac{1}{3} h) . \frac{M}{c}$$

Demnach

$$\text{CXLVIII.} \begin{cases} M = \frac{N . N' . \mathfrak{R} . W . c}{(n-1).(n'-1).(a + \frac{1}{3} h)} \\ R = \frac{N . N' . \mathfrak{R} . W . c}{(n-1).(n'-1).(a + \frac{1}{3} h)} \end{cases}$$

Ist kein Vorgelege angebracht, so bleiben die darauf sich beziehenden beiden ersten Faktoren im Zähler und Nenner weg.

§. 75.

Die bisherigen Ausdrücke beantworten alle hierher gehörige Fragen.

Ex. Ein 14 schuhiges Kropfrad soll, bei einem lebendigen Gefälle von 5′, acht Umgänge in einer Minute machen, und mittelst eines doppelten Vorgeleges den letzten Trilling 70mal in 1 Minute herumtreiben. An der letzten Trillingswelle wirkt in der Entfernung 18″ von der Trillingsaxe ein Widerstand von 80 Berl. tb

Wie muß das Vorgelege eingerichtet werden, und wieviel Wasser wird in jeder Sekunde erfordert?

Nach der Forderung ist hier $\frac{N}{n} \cdot \frac{N'}{n'} = \frac{70}{8}$. Nehmen wir nun $\frac{N}{n} = 5$, so wird $\frac{N'}{n'} = \frac{70}{5 \cdot 8} = \frac{7}{4}$. Um diese große Ungleichheit zwischen $\frac{N}{n}$ und $\frac{N'}{n'}$ zu vermeiden, wollen wir nun $\frac{N}{n} = 3{,}5$ setzen, also $3{,}5 \cdot \frac{N'}{n'} = \frac{70}{8}$; dieses giebt $\frac{N'}{n} = 2{,}5$, welches wir beibehalten können. Wollten wir $\frac{N'}{n'} = \frac{N}{n}$ haben, so hätten wir $\sqrt{\frac{70}{8}} = 2{,}96$, also genau genug $\frac{N}{n} = \frac{N'}{n'} = 3$. Nehmen wir nun auch $n = n' = 10$, so erhalten wir $N = N' = 30$.

Die Höhe des Wasserstandes vor der Fallschütze wollen wir zu $1{,}5'$ annehmen, so wird nach (§. 73.) $h = 1{,}5 + \frac{1}{2} = 2'$ und $a = 5 - \frac{1}{2} = 4{,}5'$. Man hat überdas $\mathfrak{R} = 1{,}5'$; $R = 7'$; c giebt sich aus der Forderung, daß das Wasserrad 8 Umgänge in 1 Minute machen soll; daraus folgt $c = 5{,}86'$; also nunmehr

$$M = \frac{30 \cdot 30 \cdot 1{,}5 \cdot W \cdot 5{,}86}{9 \cdot 9 \cdot 7 \cdot (4{,}5 + 0{,}66)} = \frac{7911}{2925} \cdot W$$

Der Widerstand W soll 80 Berl. ℔ betragen; es ist aber das Gewicht von 1 rhl. Kub. Fuß Wasser = 66 ℔ (Berl.), also $W = \frac{80}{66} = 1{,}212$ K. F. W., und

$$M = \frac{7911}{2925} \cdot 1{,}212 = 3{,}27 \text{ rhl. K. F.}$$ *)

§. 76.

Die Formel (CXLVIII) gilt auf gleiche Weise für die oberschlächtigen Räder; h giebt sich aus dem Wasserstande am Ende des über dem Rade hinlaufenden Gerinnes, wozu noch die Höhe bis zur Mitte vom Bogenstück des mechanischen Umfangs des Wasserrades, welches zwischen die 2te und 3te Bodenschaufel fällt, addirt wird. Wegen der Verschüttung des Wassers kann man a = 1,6. R setzen. Hiernach braucht man also dem Wasserverlust nicht noch besonders Rechnung zu thun.

§. 77.

Weil ich vielleicht Leser finden werde, welche in Bezug auf Stellung, Einrichtung und theoretische Bestimmung noch etwas mehr hier zu finden wünschen, so füge ich für Solche noch folgendes bei.

1) Aus einem zur Verzeichnung des Rades auf dem Papier beliebig angenommenen Punkte δ (Fig. 5.) beschreibe man den äußeren Umfang des Rades, den die Schaufeln mit ihrem äußeren Rande berühren, ingleichem den äußeren Umfang eines der beiden Rädkränze, wovon hier bγk ein Stück ist. Der mittlere Halbmesser δe ist der mechanische Halbmesser, so daß der mit δe beschriebene Kreis der mechanische Umfang des Rades ist, welcher durch die Mittelpunkte aller Schaufeln durchgeht. Nur beobachte man dabei, daß

*) Auf den Wasserverlust wegen der Spielräume zwischen dem Rande der Schaufeln und den Wänden des Gerinnes ist hierbei keine Rücksicht genommen.

εδ allemal wenigstens um 1 rhl. Fuß höher genommen wird, als die Höhe des lebendigen Gefälles ist. In der Höhe des lebendigen Gefälles über e ziehe man die horizontale A ζ B für den Grabenboden. ζm ist die Höhe des Wasserstandes, ζn die ordentliche Höhe der Schützenöffnung; ε die Mitte der Oeffnung.

2) Der mechanische Umfang des Rades wird von der AB hier in a geschnitten; durch die Mitte des Bogens aθe ziehe man die gerade δf und nun durch a die βaα der δf gleichlaufend, so ist δαβ der Winkel, unter welchem man die Schaufeln gegen den Halbmesser stellen kann *).

Jetzt kommt es noch darauf an, wie weit die Fallschütze, hier die Stelle ζ von a abstehen solle? Zur Begründung einer solchen Bestimmung für alle Fälle muß eine der Sache anpassende Forderung zum Grunde gelegt werden. Ich fordere, die aus der Mitte ε herkommenden Theilchen sollen den Strahl εa, wenigstens beiläufig, bilden; sie sollen beiläufig die Stelle a erreichen.

Die Zeit, in welcher die Wassertheilchen von ε bis a also um die Tiefe εζ vermöge der Schwere niedersinken, sey $= t$, so ist $t = \sqrt{\frac{\varepsilon\zeta}{g}}$. In ebender Zeit müssen aber auch die Wassertheilchen den horizontalen Weg ζa vorwärts durchlaufen. Nun ist die horizontale Geschwindigkeit in $\varepsilon = 2\sqrt{g \cdot m\varepsilon}$, also der horizontale Weg $\zeta a = t \cdot 2\sqrt{g \cdot m\varepsilon} = 2\sqrt{\varepsilon\zeta \cdot m\varepsilon}$. Beschreibt man also auf ζm einen Halb-

---

*) Eiselen ist meines Wissens der Erste, welcher die schiefe Stellung der Schaufeln vorgeschlagen und gut befunden hat. Die hier angegebene Stellung ist wenig von der seinigen verschieden.

kreis, und zieht dann das Perpendikel ιν, so hat man $\zeta a = r . \iota \nu$. Es sey z. B. $\iota\zeta = \frac{1}{3}$ Fuß, $m\iota = \frac{4'}{3}$, so wird $\zeta a = 2\sqrt{\frac{1}{3} . \frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$. Belidor hatte in einem vorgekommenen Falle $\iota\zeta = 1'$; $m\iota = 7'$. Dieses giebt $\zeta a = 2 . \sqrt{1 . 7} = 5,3'$.

Die Stelle β ist nun für alle Fälle eine sehr schickliche Stelle für den Anfang des mit dem Umfange des Rades koncentrisch gekrümmten Boden des Kropfgerinnes.

3) Kommt die Schaufel αβ in die Lage x, so daß x in AB fällt, und a in w, so nehmen wir xy als die mittlere Stelle für den Stoß an, also w als die Gränze der Stoßhöhe. Ist also pqwz horizontal, so ist ze die Druckhöhe, und mq die Stoßhöhe.

4) Der Winkel $x\delta b$ sey $= \phi$, so weicht die Schaufel xy dem auf sie beiläufig als senkrecht angenommenen Stoß mit einer Geschwindigkeit aus, die $= c . \text{Cos.} \frac{1}{2} \phi$ ist. Ist nämlich xu senkrecht auf δf, und fx senkrecht auf δx, so ist die Geschwindigkeit der Schaufel xy die des Rades, also = c nach der Richtung xf. Hieraus entsteht nach der auf δf also auch auf xy senkrechten Richtung xu die Geschwindigkeit $fx . \text{Sin.} ufx = c . \text{Cos.} u\delta x = c . \text{Cos.} \frac{1}{2} \phi$.

Ist also $\mathfrak{C}$ die Geschwindigkeit mit welcher das Wasser senkrecht auf xy stürzt, so ist

$$\text{Stoß nach } xu = \frac{\mathfrak{C} - c . \text{Cos.} \frac{1}{2} \phi}{2g} . M$$

Es sey nun uθ senkrecht auf xf, so entsteht aus der Wirkung xu die

$$x\theta = xu . \text{Cos.} ux\theta = ux . \text{Cos.} \frac{1}{2} \phi$$

$$= \frac{\mathfrak{C} - c . \text{Cos.} \frac{1}{2} \phi}{2g} . M . \text{Cos.} \frac{1}{2} \phi$$

Also

$$\left.\begin{array}{l}\text{Wirkung des Stoßes am}\\ \text{Umfang nach } x\theta \text{ senk-}\\ \text{recht auf den Halbmes-}\\ \text{ser } \delta x\end{array}\right\} = \frac{C - c.\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\phi}{2g}.\,M.\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\phi$$

5) xs sey lothrecht, fs horizontal, so ist die aus fx = c entstehende lothrechte Geschwindigkeit

$$xs = fx.\,\text{Cos.}\,sfx = c.\,\text{Cos.}\,sfx$$

Es ist aber

$$sfx + fx\delta + e\delta x = 180^\circ$$
$$fx\delta = 90^\circ$$

und

$$\text{Cos.}\,sfx = \text{Sin.}\,e\delta x = \text{Sin.}\,\phi$$

Folglich

lothrechte Geschwindigkeit $xs = c.\,\text{Sin.}\,\phi$

Die hierzu gehörige Höhe ist $\dfrac{c^2.\,\text{Sin.}\,\phi^2}{4g}$

6) Um nun für die Ausübung nicht zu günstig für den Effekt des Rades zu rechnen, bringe ich zur Bestimmung des Drucks im wasserhaltigen Bogen nicht die ganze Höhe ze in Rechnung.

Wegen der Aufstauung, die das Wasser beim Anstossen an die Schaufeln unvermeidlich leidet, gebe ich die lothrechte Geschwindigkeit des Wassers nach dem Stoße bei a so gut als völlig verlohren, so daß es von a herab erst wieder durch seinen Fall, den die unter ihm weglaufende Schaufel gestattet, Geschwindigkeit erhalten muß. Ich nehme daher zur Sicherheit für die Ausübung an, daß das Wasser erst noch von w herab um die Tiefe $\dfrac{c^2.\,\text{Sin.}\,\phi^2}{8g}$ herabfallen müsse, bevor es seinen vollen Druck auf die Schaufeln ausüben könne. Wenn daher die Höhe ze = a gesetzt wird, so setze ich

$$\text{Druckhöhe} = a - \frac{c^2.\ \text{Sin.}\ \phi^2}{8g}$$

und

$$\text{Größe des Drucks} = \left(a - \frac{c^2.\ \text{Sin.}\ \phi^2}{8g}\right).\ \frac{M}{c}$$

So erhalten wir also

$$\text{CXLIX.}\quad p = \left(\frac{C - c.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\phi}{2g}.\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\phi + \frac{a}{c} - \frac{c^2.\ \text{Sin.}\ \phi^2}{8g}\right).\ M$$

7) Setzen wir $m\zeta = h$, und die ganze Höhe der Stelle m über der $e = H$, so kann man

$mq = h + 0{,}5'$; $a = H - (h + 0{,}5')$

$\mathfrak{C} = 0{,}8 .\ 2\sqrt{gh}$

setzen, ohne dabei die Tiefe ζq zu berücksichtigen.

8) Das Maximum des Effekts erfordert, daß pc ein Maximum werde. Es ist aber

$$pc = \left(\frac{\mathfrak{C}c - c^2.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\phi}{2g}.\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\phi + a - \frac{c^2.\ \text{Sin.}\ \phi^2}{8g}\right).\ M$$

Die Differentirung giebt

$$\mathfrak{C}.\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\phi - (\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\phi)^2 + (\tfrac{1}{4}(\text{Sin.}\ \phi)^2).\ 2c = 0$$

also

$$\text{CL.}\ \begin{cases} c = \dfrac{\mathfrak{C}.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\phi}{2.\ ((\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\phi)^2 + \frac{1}{4}\ \text{Sin.}\ \phi^2)} \\ \text{oder} \\ c = \dfrac{\mathfrak{C}.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\phi}{1{,}5 + \text{Cos.}\ \phi - \frac{1}{2}\ \text{Cos.}\ \phi^2} \end{cases}$$

9) Für $\phi = 0$ (wie bei Schnurgerinnen, die hierunter mit begriffen sind) wird hiernach $c = \frac{1}{2}C$; für $\phi = 60^\circ$ wird $c = 0{,}462 .\ C$; für $\phi = 90^\circ$ (welches nach unserer Forderung eigentlich nie statt finden

könnte) $c = 0{,}471 \, . \, C$. Es fällt also in der Ausübung die vortheilhafteste Geschwindigkeit allemal nahe an $0{,}50 \, . \, C$ und kann ohne Bedenken in allen Fällen $= \frac{1}{2} \, C$ genommen werden.

10) Was den Wasserverlust wegen der Spielräume betrifft, so kommt solcher in jeder Abtheilung d. h. zwischen jedem Paare von Schaufeln besonders in Betrachtung, weil sich der Druck durch die Spielräume nicht fortpflanzt, da die Schaufeln lange genug genommen werden müssen, damit die Räume zwischen den Schaufeln nicht ganz mit Wasser ausgefüllt werden. Wenn daher die Fläche des Spielraums bei einer Schaufel $= w$ ist, so kann man die verlohrne Wassermenge

$$= 0{,}8 \, . \, w \, . \, 2\sqrt{gv}$$

setzen, wenn v die mittlere Druckhöhe des Wassers in den einzelnen Abtheilungen bezeichnet.

Um auch hierbei nicht vergebliche theoretische Grübeleien einzumischen, und doch immer zur Sicherheit in der Ausübung zu rechnen, kann man $v = 1$ Fuß setzen, also in Bezug auf rhl. Fuße

CLI. verlohrne Wassermenge $(= 1{,}6 \, . \, w\sqrt{g})$
$= 6{,}4 \, . \, w$ Kubik Fuß
wo w in rhl. Q. F. ausgedruckt wird.

Ist also M die gesammte vom Gerinne in jeder Sekunde abgeführte Wassermenge, so muß man, in der Gleichung für p, $M - 6{,}4 \, . \, w$ statt M schreiben. Die Spielräume müssen übrigens möglichst klein gemacht werden.

11) Ist die ganze Anlage für Mittelwasser berechnet, so mache man

CLII. Größe der Schaufelflächen $= \frac{1,5 \cdot \mathfrak{M}}{c}$ um beträchtlich mehr Raum zwischen den Schaufeln zu erhalten, als zur Aufnahme des Wassers nothwendig wäre. Man gewinnt hiermit an der Größe des Stoßes, weil für den Stoß nichts von der Wassermasse verlohren geht; und man ist überdas in den Stand gesetzt, auch noch eine größere Wassermenge als die $\mathfrak{M}$ benutzen zu können.

12) Man war bisher gewohnt, die Kropfräder ohne Radboden zu bauen, so daß das Wasser zwischen den Schaufeln in den inneren Raum des Rades hinabstürzen konnte. Dieser Gebrauch ist ebenso nachtheilig als er allgemein ist. Ich rathe daher bei diesen Rädern nicht wie den oberschl. Rädern den inneren, sondern den äußeren Rand der Kränze mit Brettern zu beschlagen, und die Schaufeln durch diesen Bretterboden auf die Kränze zu befestigen. Ich fordere also auch allemal zwei Radkränze.

Anm. Die Gleichung CXLII, welche sich nun auch durch $p = \left(a + \frac{h + 0,5}{3}\right) \cdot \frac{M}{c}$, in Bezug auf Fuße ausdrucken läßt, giebt ohngefähr dasselbe wie die CXLIX. Man kann nun auch in (CXLII) $c = \frac{1}{2}\,\mathfrak{C}$ nehmen. Da übrigens der Stoß des Wassers oder die Stoßhöhe beträchtlich weniger leistet, als eine gleichgroße Druckhöhe, so versteht es sich von selbst, daß in jedem Falle h so klein genommen werden müsse, als es die Umstände erlauben. Daß übrigens, wenn alles übrige schon vorgeschrieben ist, nicht auch R nach Willkühr angenommen werden könne, erhellet schon aus (CXLVIII).

Uebrigens muß aber in der Bestimmung von R die Forderung No. 1. berücksichtigt, und hiernach W und ℜ gehörig eingerichtet werden, um R nicht zu klein zu nehmen. Aber auch die Vergrößerung von R hat besonders bei Maschinen gleichförmigen Beharrungsstandes ihre Gränzen, weil sie zwei nachtheilige Folgen hat: 1) daß mit ihr zugleich die Reibung an den Wellzapfen vergrössert wird, indem das Gewicht des Rades in größerem Verhältnisse als sein Halbmesser wächst, auch höhere Räder stärkere Zapfen erfordern; und daß 2) höhere Räder längere Kropfgerinne nothwendig machen, die Gerinne aber allemal einen schädlichen Einfluß auf die Bewegung des Wassers haben. Wo daher W und ℜ bis zu gewissen Gränzen von unserem Willkühr abhängen, thut man wohl, diese Größen so zu nehmen, daß R zwischen 6 und 8 rhl. Fuße fällt.

§. 78.

In der Anwendung auf die Getraidmühlen sey k das stündlich abzumahlende Korn in Berliner Pfunden (die mit den Cöllnischen einerlei sind, indem wir hier nicht bis zu Granen rechnen), so kann man, wenigstens soweit meine Beobachtungen reichen, bei einem einfachen Vorgelege

$$\text{CLIII.}\quad k = \frac{3 \cdot (n - 1) \cdot p \cdot c}{n} \text{ Berliner ℔}$$

setzen.

Der Berl. Scheffel hält 2741 Pariser Kubik Zoll und wiegt 80 Berliner ℔. Man mahlt also in 24 Stunden $\frac{72 \cdot (n - 1) \cdot pc}{80 \cdot n}$. Bezeichnen wir daher die Menge des Korns (Roggens), welches in 24 Stunden abgemahlen werden kann, mit K, so wird

CLIV.
$$K = \frac{0{,}9 . (n - 1) . p . c}{n} \text{ Berl. Scheffel}$$

Für ein doppeltes Vorgelege wäre

$$K = \frac{0{,}9 . (n - 1) . (n' - 1) . p . c}{n . n'}$$

n, n' sind die Anzahl der Triebstöcke der nach einander folgenden Trillinge.

Ist r der Halbmesser des Läufers, so kann man

$$\text{CLV. } r = \sqrt{0{,}12 . pc} + \frac{1}{30} . R$$

nehmen. Der Druck eines Läufers kann durch die Stellschraube zu jeder verlangten Gränze vermindert, nicht aber auf gleiche Weise vergrössert werden, wenn der Läufer an sich zu leicht ist. Man kann ihm in dieser Hinsicht eine beliebige Höhe geben; nur nehme man ihn nicht unter 12'', zumal da sich die Steine doch nach und nach abreiben.

Zu kleine Geschwindigkeit des Läufers giebt nicht die erforderliche Wirkung zur Zerreibung des Getraides zu Mehl; zu große wird der Frucht durch die Erwärmung schädlich. Ich fordere in dieser Hinsicht:

CLVI. Die Geschwindigkeit des Läufers an seinem Umfange soll nicht < 10' rhl. und nicht > 30' — seyn.

wofern nämlich die Mühle aufs vortheilhafteste betrieben werden soll. Denn daß der Läufer hoch genug gestellt werden könne, um auch bei noch größerer Geschwindigkeit dem Mehle nicht nachtheilig zu werden, darf man mich nicht belehren.

Hiernach muß also die Einrichtung so gemacht werden, daß

$$\text{CLVII.}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{N \,.\, N' \,.\, r}{n \,.\, n' \,.\, R} \text{ nicht } \left\{\begin{array}{l} < 10' \\ > 30' \end{array}\right. \text{ werde} \\ \left.\begin{array}{l}\text{Im Mittel etwa} \\ \dfrac{N \,.\, N' \,.\, r}{n \,.\, n' \,.\, R} = 20' \end{array}\right\} \text{für ein doppeltes Vorgelege.}\end{array}\right.$$

Ist, wie es bei den Wassermühlen der gewöhnliche Fall ist, nur ein einfaches Vorgelege angebracht, so fallen N' und n' weg. Wo es nach dem Lokal der Anlage nur immer möglich ist, muß man n, n' nicht unter 9 nehmen; je größer, desto vortheilhafter für den Effekt. Hat man diese Werthe festgesetzt, so erhält man beim Gebrauche der letzteren Bestimmung (CLVII)

$$N \,.\, N' = \frac{20 \,.\, n \,.\, n' \,.\, R}{r}$$

Will man N, N' gleich groß haben, so hat man

$$\text{CLVIII.} \quad N = N' = \sqrt{\frac{20 \,.\, n \,.\, n' \,.\, R}{r}}$$

Bestimmt uns das Lokal zu ungleichen Werthen von N und N', so nimmt man $N >$ oder $< \sqrt{\dfrac{20 \,.\, n \,.\, n' \,.\, R}{r}}$ und dann

$$\text{CLIX.} \quad N' = \frac{20 \,.\, n \,.\, n' \,.\, R}{N \,.\, r}$$

womit die Einrichtung der ganzen Mühle bestimmt ist.

§. 79.

Die Gleichung CLIV läßt sich auch auf Thiermühlen anwenden. Man kann sich hierbei des Göpels, des Laufrades und der Tretschiebe bedienen. Dabei ist nun

CLX.
Für den Göpel, wo Zugkraft wirkt,
bei Pferden beiläufig $p = 2{,}6$ rhl. K. F. Wasser
— Ochsen ——— $p = 3$ K. F. W.
Für das Laufrad und die Tretscheibe, wo das Gewicht der Thiere wirkt
bei Pferden, die unter einem Winkel von 18 bis 20 Graden wirken
beiläufig $p = 3$ K. F. Wasser
— Ochsen, die unter einem Winkel von 20 bis 22° wirken,
beiläufig $p = 3{,}4$ K. F. Wasser
In allen diesen Fällen kann man
für Pferde $c = 3{,}3'$ rhl. F. für Ochsen $c = 1{,}5$ rhl. F.
annehmen.

Die Tretscheibe verdient übrigens den Vorzug. Nur nehme man in der Ausübung, wenn hier der mechanische Halbmesser von der Umdrehungsaxe bis zum Schwerpunkt des Thieres gerechnet wird, niemals $R < 14$ rhl. Fuß. Beim Gebrauch der Tretscheibe hat man hiernach:

für Pferde für Ochsen

CLXI. $p \cdot c = 3 \cdot 3{,}4 = 10{,}2$. $p \cdot c = 3{,}3 \cdot 1{,}5 = 4{,}95$.

Ich habe hierbei p so genommen, wie dergleichen Thiere in Teutschland in allen Gegenden leicht zu haben sind, indem p beiläufig und genau genug $\frac{1}{5}$ ihres ganzen Gewichts ist. Uebrigens kann die Geschwindigkeit eines Läufers an seinem Umfange bei diesen Thieren nicht wohl über 10 bis 11 Fuße betragen.

§. 80.

Die Tretscheibe bedarf hierbei allemal eines doppelten Vorgeleges. Ich halte dabei für die ganze Zusammenordnung folgende Einrichtung für die vorzüglichste.

Unter der Tretscheibe wird ein Kammrad mit N Kämmen an der Scheibenwelle angebracht. Dieses läßt man in einen Trilling mit schief eingelegten Triebstöcken (so daß der oberste Triebstock mit der Fläche des Kammrades parallel lauft) eingreifen. Dieser hat n Triebstöcke.

An der horizontalen Trillingswelle wird in gehöriger Entfernung (so daß man damit unter der Tretscheibe ganz wegkommt) das zweite Kammrad angebracht mit N' Kämmen, dieses greift oben in den am Mühleisen liegenden 2ten Trilling ein, welcher n' Triebstöcke hat.

CLXII.
Für ein Pferd kann man

$$n = 20; \quad n' = 12$$
$$N = 88; \quad N' = 88$$

nehmen.

Für einen Ochs

$$n = 12 \quad n' = 8$$
$$N = 112 \quad N' = 112$$

Dabei wird R = 14 bis 15' angenommen.

Aus CLIV und CLXI wird hiernach

CLXIII.
für 1 Pferd

$$K = \frac{0{,}9 \cdot 19 \cdot 11}{20 \cdot 12} \cdot 10{,}2 = 8 \text{ Berl. Scheffel}$$

für 1 Ochs

$$K = \frac{0{,}9 \cdot 11 \cdot 7}{12 \cdot 8} \cdot 4{,}95 = 3{,}57 \text{ Berl. Scheffel.}$$

Der Halbmesser des Läufers ergiebt sich, R = 15 gesetzt, aus (CLV und CLXI.)

CLXIV.
für 1 Pferd $r = \sqrt{0{,}12 \cdot 10{,}2} + 0{,}5 = 1{,}6$ rhl. F.
— 1 Ochs $r = \sqrt{0{,}12 \cdot 4{,}95} + 0{,}5 = 1{,}27$ rhl. F.

Sechstes Kapitel.

Theorie des Krumzapfens oder der Kurbel.

§. 81.

Die hinlänglich bekannte Kurbel, welche so häufig als Hebelarm vorkommt, um mittelst einer am Kurbelgriff angebrachten Kraft eine Welle, in der sie befestigt ist, herum zu drehen, wird dann insbesondere Krumzapfen genannt, wann die Welle durch eine auf irgendwelche Weise an ihr angebrachte Kraft in Umdrehungsbewegung gesetzt, und dabei am Kurbelgriff die Last angebracht wird. Der Kurbelgriff heißt in diesem Falle die Warze des Krumzapfens. Indessen wird doch in diesem Falle die Benennung der Kurbel, besonders in der Sprache der Werkmeister, sehr häufig beibehalten, und wir werden daher auch hier beide Benennungen mit einander verwechseln. Wir werden zwar die besondere Anwendung auf Schneidmühlen erst in der Folge beibringen. Um der Versinnlichung willen aber wollen wir uns gleich anfänglich an die Betrachtung der Bewegung eines Sägegatters halten, die sich leicht auf jede andere durch die Kurbel zu bewirkende Bewegung übertragen läßt. Hierzu dient uns Fig. 6. Das Gatter ist durch eine Kurbelstange mit der Warze so verbunden, daß es beim Umlaufe der letzteren lothrecht auf- und niedergezogen wird.

Beim höchsten und tiefsten Stande der Warze steht die Kurbelstange lothrecht, und das statische Moment der Last ist in diesen Stellen = o. In allen übrigen Stellen weicht die Lage der Kurbelstange von der lothrechten um einen gewissen Winkel ε ab, den wir den Abweichungswinkel nennen. In der horizontalen Lage des Kurbelarms cf (der mit cf beschriebene Kreis bezeichnet den mechanischen Umfang der Kurbelbahn) ist der Abweichungswinkel und zugleich das statische Moment der Last am größten. Im unteren Quadrante der ersten Bahnhälfte ändern sich die statischen Momente abnehmend ebenso, wie im oberen Quadrante zunehmend. In der 2ten Bahnhälfte ged erfolgt alles wieder ebenso wie in der ersten. Ist die Warze von d aus durch einen unbestimmten Bogen da gekommen, so bezeichne ich diesen Winkel dca oder Bogen da von d herab gemessen mit α. Die während dem Umlaufe der Warze unveränderliche mechanische Länge der Kurbelstange ab setze ich = λ; den Abweichungswinkel abc setze ich als eine während der Umdrehung veränderliche Größe = ε. Offenbar kann nun keine gleichförmige Bewegung statt finden, da die statischen Momente der Last während dem Umlaufe der Warze sosehr wechseln. Hierzu kommt aber noch der Umstand, daß die Masse des Gatters während der Bewegung der Warze von d bis f sehr beschleunigt werden muß, indem ihre Geschwindigkeit in der Stelle d = o, hingegen, wenn die Warze in f gekommen ist, mit der Geschwindigkeit der Warze beiläufig einerlei ist (nicht völlig einerlei, wegen des Abweichungswinkels ε). Dann geht die bis in f erworbene Geschwindigkeit nach und nach wieder ganz verlohren, indem sie in g wieder = o ist. Um nun die Bewegung der Gattermasse wieder herzustellen, wird nothwendig Kraft erfordert, auch wenn db horizontal und sonst kein Widerstand vorhanden wäre. Es wird Kraft erfordert, blos

die Masse des Gatters in einer bestimmten Zeit durch einen Raum = d g (Fig. 6.) zu bewegen.

Wird die Kurbel mittelst eines Wasserrades herumgetrieben, so strebt zwar die Masse des Wasserrades, auch wann die Warze in g angekommen ist, ihre einmal erlangte Bewegung vermöge der Trägheit fortzusetzen. Aber zur Fortsetzung unverminderter Bewegung gehört nothwendig Beibehaltung derselben Anzahl von Eindrücken, welche die Masse des Rades hatte, da die Warze in g angekommen war. Es muß aber von da aus beim Wiederaufsteigen der Warze außer der Masse des Rades auch noch die Masse des Gatters mit in Bewegung gesetzt werden, die dem Rade beiwohnenden Eindrücke werden also verhältnißmäßig unter die Masse des Gatters vertheilt, und mit der daher beim Rade abnehmenden Summe von Eindrücken muß daher auch die Bewegung desselben nothwendig abnehmen, wenn außer der Trägheit sonst keine Kraft in das Rad wirkt. So kommt also die Warze mit verminderter Geschwindigkeit in d an, wo alle Geschwindigkeit der Gattermasse wieder = o geworden. Es erfolgt also von d herab wieder die vorige Verminderung der Bewegung, wie von g durch e nach d hinauf u. s. f. so daß nothwendig endlich völliger Stillstand des Rades eintreten muß, wenn nicht eine besondere an seinem Umfange angebrachte Kraft jenen Abgang immer wieder ersetzt. Der schnelle Lauf des Wasserrades kann zur Erhaltung seiner Bewegung nicht behülflich seyn. Im Gegentheil je schneller nun zugleich das Gatter in Bewegung gesetzt werden soll, desto mehr Eindrücke bedarf solches zur Bewirkung seiner Geschwindigkeit, und desto mehr muß also das Rad von der Summe seiner Eindrücke abgeben; eine desto größere Anzahl von Eindrücken muß also dem Rade zur Erhaltung seiner Bewegung immerfort wieder mitgetheilt werden. Hier muß also beständige Ueberwucht keineswegs

beständige Beschleunigung zur nothwendigen Folge haben, sondern es kann beständige Ueberwucht nothwendig werden, um die rückkehrende Bewegung des Gatters zu unterhalten und solche mit einer gewissen mittleren Geschwindigkeit zu bewirken, wie solches bei sonst fehlendem Widerstande offenbar der Fall wäre. Bezeichnet man den auf den Umfang der Kurbelbahn reducirten Werth der Kraft mit P, die Nutzlast an der Warze mit Q, so ist der Weg der Kraft zum Weg der Last (die Nebenlast = 0 gesetzt) $= \frac{1}{2}\pi : 1 = 1,57 : 1$; also für gleichförmige Bewegung

CLXV. $\begin{cases} Q : P = 1,57 : 1 \\ \text{und} \\ Q = 1,57 \cdot P;\quad P = 0,637 \cdot Q \end{cases}$

Hiernach haben Belidor, Karsten und alle übrigen Schriftsteller ihre Berechnungen bei allen Arten von Maschinen angestellt, die durch die Kurbel betrieben werden; auch die neuesten französischen Schriftsteller sind dabei geblieben. Aus den vorstehenden Bemerkungen läßt sich aber die Unstatthaftigkeit dieser Ausdrücke leicht begreifen. Es ist allemal

CLXVI. $Q < 1,57 \cdot P;\quad P > 0,637 \cdot Q$

§. 82.

Nach der angegebenen Bedeutung unserer Buchstaben ist $\text{Sin.}\ \varepsilon = \frac{r \cdot \text{Sin.}\ \alpha}{\lambda}$. Es sey der Krumzapfen an der Welle eines Rades vom Halbmesser R angebracht, und am mechanischen Umfang des Rades eine Kraft p wirkend. Der Widerstand des Gatters sey Q, so ist das statische Moment dieses Widerstandes in der angenommenen Lage der Kurbelstange $= Q \cdot r \cdot \text{Sin.}\ \alpha$, wenn ε sehr klein ist, so daß ba als Lothrecht gelten kann. Für das Gleichgewicht zwi-

schen Kraft und Last wäre also $Q = \frac{R \cdot p}{r \cdot \text{Sin.}\, \alpha}$. Da wir aber wegen des schiefen Zugs um der Allgemeinheit willen nur p. Cos. ε statt p in Rechnung zu bringen haben, so erhalten wir für das Gleichgewicht

$$\text{CLXVII.} \left\{ \begin{aligned} Q &= \frac{R \cdot p \cdot \text{Cos.}\, \varepsilon}{r \cdot \text{Sin.}\, \alpha} = \frac{R \cdot p \cdot \sqrt{(1 - \text{Sin.}\, \varepsilon^2)}}{r \cdot \text{Sin.}\, \alpha} \\ &= \frac{R \cdot p}{r \cdot \text{Sin.}\, \alpha} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{r^2 \cdot \text{Sin.}\, \alpha^2}{\lambda^2}\right)} \end{aligned} \right.$$

Weil nun hier angenommen werden kann, daß $\frac{r}{\lambda}$ nicht über $\frac{1}{5}$ betrage, so kann man für die verschiedenen Werthe von $\sqrt{\left(1 - \frac{r^2 \cdot \text{Sin.}\, \alpha^2}{\lambda^2}\right)}$ denjenigen nehmen, welcher durch den Mittelwerth von $\frac{r^2 \cdot \text{Sin.}\, \alpha^2}{\lambda^2}$ bestimmt wird, von $\alpha =$ o bis zu $\alpha = 90°$.

Es ist aber die Summe aller möglichen Werthe von $\pi \cdot r^2 \cdot \text{Sin.}\, \alpha^2$ von $\alpha = 0$ bis zu $\alpha = 90°$ } = dem kub. Inhalt einer Halbkugel vom Halbmesser $r = \frac{2}{3} \pi r^3$

Also

$$\text{Summe aller } r^2 \cdot \text{Sin.}\, \alpha^2 = \frac{2}{3} r^2$$

und

$\frac{\text{Summe aller } r^2 \cdot \text{Sin.}\, \alpha^2}{r}$ oder das arithmetische Mittel aller $r^2 \cdot \text{Sin.}\, \alpha^2$ } $= \frac{2}{3} r^2$

Demnach

der mittlere Werth aller $p \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{r^2 \cdot \text{Sin.}\, \alpha^2}{\lambda^2}\right)}$ } sehr nahe $= p \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{2 r^2}{3 \lambda^2}\right)}$

In der Ausübung muß man λ so groß nehmen, daß die $\sqrt{\left(1 - \frac{2r^2}{3\lambda^2}\right)}$ nicht merklich von 1 verschieden ist. Für $\lambda = 5 \cdot r$ wird $\sqrt{\left(1 - \frac{2r^2}{3 \cdot \lambda^2}\right)} = 0{,}984$, also schon wenig von 1 verschieden. Man nimmt aber $\frac{r}{-} < \frac{1}{5}$.

§. 83.

Bezeichnen wir also den Widerstand, welchen die Kurbelstange wirklich zu überwinden hat, mit Q, so muß man $\frac{Q}{\sqrt{\left(1 - \frac{2r^2}{3\lambda^2}\right)}}$ oder $\frac{\lambda}{\sqrt{\left(\lambda^2 - \frac{2r^2}{3}\right)}} \cdot Q$ statt Q in Rechnung bringen.

Der Halbmesser der Warze sey $= r$, und der Reibungskoefficient $(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}) = \mu$, so ist die Reibung am Umfang der Warze $= \frac{r}{r} \cdot \mu \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\left(\lambda^2 - \frac{2r^2}{3}\right)}} \cdot Q$; also mit Rücksicht auf diese Reibung $\frac{r + \mu r}{r} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\left(\lambda^2 - \frac{2r^2}{3}\right)}} \cdot Q$ statt Q. Wir setzen nun

$$\text{CLXVIII.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{\sqrt{\left(\lambda^2 - \frac{2r^2}{\lambda^2}\right)}} \cdot \frac{r + \mu r}{r} = \varepsilon \\ \text{also } \varepsilon\, Q \text{ statt } Q \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir die übrige Nebenlast, auf die Stelle der Warze gebracht, mit q, so ist die Ueberwucht am Umfange des Rades $= p - \frac{r}{R} \cdot (\varepsilon\, Q \cdot \text{Sin.}\, \alpha + q)$.

Wir können aber auch die Kraft auf die Warze reduciren. Bezeichnen wir die so reducirte Kraft mit P, so ist

$P = \frac{R}{r} \cdot p$, und

CLXIX. die Ueberwucht an der Stelle der Warze in ihrer Bahn $= P - (\varepsilon\, Q . \text{Sin.}\, \alpha + q)$

§. 84.

Aber aus mechanischen Gründen kommt bei wirklicher Bewegung noch ein besonderer Umstand hinzu. Mit dem Umlaufe der Warze ist nämlich zugleich Centrifugalkraft verbunden, vermöge der die Kurbelstange z. B. in a einen Druck nach ca leidet, den wir mit δ bezeichnen wollen. Aus diesem entsteht ein lothrechter Druck nach ab (den wir für diese Berechnung geradezu als lothrecht können gelten lassen) $= \delta . \text{Cos.}\, \alpha$, welcher an dieser Stelle die Masse des Kurbelarms, der Kurbelstange und des Gatters aufwärts druckt, also dem Niedergange des Gatters in diesem ersten Quadrant entgegenwirkt. Bezeichnen wir nun das Gewicht der Gattermasse mit Zubehör mit einem teutschen $\mathfrak{Q}$, so ist

$\delta = \frac{2v}{r} . \mathfrak{Q}$, wenn v die der Umlaufsgeschwindigkeit der Warze zugehörige Höhe ist. Diese Kraft gleicht also einer lothrecht an der Warze wirkenden Last $= \frac{2v}{r} . \mathfrak{Q} . \text{Cos.}\, \alpha$.

Mit Rücksicht auf die schiefe Stellungen der Kurbelstange haben wir genauer $\frac{2v}{r} . \mathfrak{Q} . \text{Cos.}\, \alpha . \frac{\sqrt{(\lambda^2 - \frac{2}{3} r^2)}}{\lambda}$.

Wir setzen nun zur Abkürzung in der Folge

CLXX. $\frac{\sqrt{(\lambda^2 - \frac{2}{3} r^2)}}{\lambda} = \zeta$

Dieser Widerstand wirkt der in a abwärts senkrecht auf ca wirkenden Kraft P als eine Kraft $= \frac{ae}{ca} \cdot \frac{2v}{r} \cdot \zeta \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathrm{Cos.}\, \alpha$ entgegen; es ist aber $\frac{ae}{ca} = \mathrm{Sin.}\, \alpha$; es wirkt also die Centrifugalkraft als ein Widerstand $= \frac{2v}{r} \cdot \zeta \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathrm{Cos.}\, \alpha \cdot \mathrm{Sin.}\, \alpha$ der Kraft P entgegen. Daher nunmehr

CLXXI. Ueberwucht an der Warze zu ihrer Umdrehung

$$= P - \left(\varepsilon\, Q\, \mathrm{Sin.}\, \alpha + q + \frac{2\zeta v}{r} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathrm{Sin.}\, \alpha \cdot \mathrm{Cos.}\, \alpha\right)$$

$$= P - q - \varepsilon\, Q \cdot \mathrm{Sin.}\, \alpha - \frac{2\zeta v}{r} \mathfrak{Q} \cdot \mathrm{Sin.}\, \alpha \cdot \mathrm{Cos.}\, \alpha$$

Im unteren Quadrant fg kommt die Schwungkraft, anstatt dem Niedergange des Gatters entgegen zu wirken, demselben vielmehr zu statten. Dieses giebt aber die Formel von selbst, indem für diesen Quadrant $\alpha > 90$, also Cos. α verneint, und daher das letzte Glied zur Rechten bejaht wird.

Im Halbkreise ged erfolgt alles wie im ersten dfg, nur in umgekehrter Ordnung, so daß jetzt die Bögen α von g nach ged gerechnet werden müssen. Es bleiben also Sin. α und Cos. α von g bis e bejaht, erstere auch noch von e bis d; letztere aber von e bis d werden verneint, wie sich gehört, weil hiermit das letzte Glied in unserem obigen Ausdruck wieder bejaht wird.

Dabei wird vorausgesetzt, daß Q für den Auf- und Niedergang des Gatters gleich groß sey, auch P einen unveränderlichen Werth habe.

Der Widerstand, den das Gatter im Niedergange findet, sey $= W$, beim Aufgange aber blos das Gewicht des Gatters zu überwinden, so hat man

für den Aufgang $Q = \mathfrak{Q}$

— — Niedergang $Q = W - \mathfrak{Q}$

Nach der Voraussetzung ist also

$$\mathfrak{Q} = W - \mathfrak{Q}$$

folglich

$$\mathfrak{Q} = \tfrac{1}{2} W$$

Der Voraussetzung, daß P einen unveränderlichen Werth behalte, welche bei unserer Bestimmung nothwendig zum Grunde liegt, kann in der Ausübung nie in aller Schärfe Genüge geschehen, in vielen Fällen aber nicht einmal nur beiläufig. Wie nämlich die Bewegung des Rades beschleunigt wird, nehmen die einzelnen Schaufeln des oberschlächtigen Rades weniger Wasser auf, die des unterschlächtigen leiden einen geringeren Stoß, also nimmt P ab. Umgekehrt nimmt bei der Verzögerung des Rades P zu. Diese abwechselnde Werthe von P sind desto mehr von einander verschieden, je mehr größte und kleinste Geschwindigkeit von einander verschieden sind. Es ist aber leicht zu begreifen, daß größte und kleinste Geschwindigkeit desto mehr von einander verschieden seyn müssen, je kleiner die Umlaufsmasse (wie die des Rades) und je länger die Zeit ist, die den Abwechslungen der statischen Momente der Last an der Warze gestattet ist. Denn je geringer die Umlaufsmasse ist, desto leichter oder schneller können Geschwindigkeitsänderungen bei ihr eintreten, und je länger Abwechslungen von Momenten in die Umlaufsmasse wirken, desto bedeutender muß ihr Einfluß auf Beschleunigung oder Verzögerung ihrer Bewegung werden.

Beim Gebrauch unserer Formeln müssen wir daher voraussetzen, daß die auf die Warze reducirte Umlaufsmasse

bedeutend größer als Q sey; je mehr daneben noch die Winkelgeschwindigkeit des Kurbelarms die des Rades übertrifft, desto näher kommen wir der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von P, und desto genauer müssen also diese Resultate unserer Formeln dem wirklichen Erfolg entsprechen.

§. 85.

Es ist nur noch übrig, zur Bestimmung der beschleunigenden Kraft die Größe der Masse anzugeben, in welche die Ueberwucht wirkt.

Die Summe aller in beständigem Umlaufe bleibender Massen, auf die Warze reducirt, sey $= \pi$; die Umlaufsgeschwindigkeit der Warze (die durch ein Vorgelege eine bedeutend größere Winkelgeschwindigkeit erhalten kann, als das Wasserrad hat) sey $= C$, so ist die Geschwindigkeit des Gatters für jeden Bogen $\alpha = C . \text{Sin.}\, \alpha$. Denn es sey am auf ca senkrecht, so gehört zur Geschwindigkeit C, die wir durch am ausdrucken können, die lothrechte $em = am . \text{Sin.}\, eam = C . \text{Sin.}\, \alpha$.

Die auf die Umlaufsbewegung der Warze reducirte Masse des Gatters mit Zubehör sey $= K$, so ist $C^2 . K = C^2 . \text{Sin.}\, \alpha^2 . \mathfrak{Q}$

also

$$K = \text{Sin.}\, \alpha^2 . \mathfrak{Q}$$

Demnach ist die gesammte Masse, in welche die Ueberwucht wirkt,

$$\pi + K = \pi + \mathfrak{Q} . \text{Sin.}\, \alpha^2$$

und daher die veränderliche beschleunigende Kraft an der Warze nach ihrer Bahn

$$\text{CLXXII. } f = \frac{P - q - \varepsilon\, Q . \text{Sin.}\, \alpha - \frac{2v\zeta}{r} . \mathfrak{Q} . \text{Sin.}\, \alpha . \text{Cos.}\, \alpha}{\pi + \mathfrak{Q} . \text{Sin.}\, \alpha^2}$$

Jedes hierbei vorkommende Gewicht, Masse, Kraft kann durch eine dem Gewicht nach völlig äquivalente Wassermasse in Kubik Fussen ausgedruckt werden.

Für diese und die noch folgenden Formeln ist

P die auf den mechanischem Umfang der Kurbelbahn reducirte Kraft

Q die Last oder der Widerstand, welcher der Bewegung des Gatters entgegenwirkt, im Auf= und Niedergange gleich groß angenommen.

q die Nebenlast auf den Umfang der Kurbelbahn gebracht.

$$\varepsilon = \frac{r + \mu r}{r} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\left(\lambda^2 - \frac{2r^2}{\lambda^2}\right)}}.$$

λ die mechanische Länge der Kurbelstange

r die mechanische Länge des Kurbelarms

r der Halbmesser der Warze

μ der Reibungskoefficient (hier etwa $\frac{1}{6}$)

$\mathfrak{Q}$ die Masse des Gatters mit Zubehör

Π Das Gewicht oder die Masse der in beständigem Umlaufe bleibenden Maschinentheile, auf den Umfang der Kurbelbahn gebracht

$$\zeta = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - \frac{2}{3} r^2)}}{\lambda}$$

α ein unbestimmt gelassenes Stück vom Umfang der Kurbelbahn, von der Stelle, die dem Gatter am nächsten liegt, nach der entferntesten, oder von der entferntesten nach der dem Gatter am nächsten liegenden genommen

v die der Geschwindigkeit der Warze am Ende des Bogenstücks α zugehörige Höhe

h die der mittleren Geschwindigkeit zugehörige Höhe

$$a = \frac{Q}{P - q};\ e = \frac{\Omega}{\Pi}.$$

§. 86.

Aus (XXII) haben wir $f = \frac{dh}{ds}$. Hier ist das dortige h unser jetziges v, und dortiges s unser jetziges α. Wird die Länge des Bogens α für den Halbmesser $= 1$ ausgedruckt, so ist d Bog. $\alpha = r . d\alpha$, also hier

$$\text{CLXXIII.}\quad f = \frac{dv}{r . d\alpha}$$

Aus (CLXXII und CLXXIII) wird

$$\frac{P - q - \varepsilon Q . \text{Sin.}\,\alpha - \frac{2\zeta}{r} . \Omega . v . \text{Sin.}\,\alpha . \text{Cos.}\,\alpha}{\Pi + \Omega . \text{Sin.}\,\alpha^2} = \frac{dv}{r . d\alpha}$$

also in der Bedeutung der Buchstaben (§. 85.)

$$dv = \frac{(P - q) . r .}{\Pi}\ \frac{1 - \varepsilon m . \text{Sin.}\,\alpha . d\alpha}{1 + e . \text{Sin.}\,\alpha^2.} - \frac{2v\zeta\Omega . \text{Sin.}\,\alpha . \text{Cos.}\,\alpha . d\alpha}{\Pi + \Omega . \text{Sin.}\,\alpha^2}$$

und

$$v = \frac{(P-q) . r}{\Pi}\left(\int \frac{d\alpha}{1 + e . \text{Sin.}\,\alpha^2} - \int \frac{\varepsilon m . \text{Sin.}\,\alpha . d\alpha}{1 + e . \text{Sin.}\,\alpha^2}\right)$$

CLXXIV.

$$- \int \frac{2v\zeta\Omega . \text{Sin.}\,\alpha . \text{Cos.}\,\alpha . d\alpha}{\Pi + \Omega . \text{Sin.}\,\alpha^2}$$

daß wir also 3 Integralien zu suchen haben.

§. 87.

Es sey $\frac{d\alpha}{1 + e . \text{Sin.}\,\alpha^2} = dy$, so hat man

$$dy = \frac{d\alpha}{\text{Cos. } \alpha^2 + (1 + e) \text{. Sin. } \alpha^2}$$

Es ist aber

$$d\alpha = \frac{d \text{ tang. } \alpha}{\text{Sec. } \alpha^2}; \quad \text{Sin. } \alpha^2 = \frac{\text{tang. } \alpha^2}{\text{Sec. } \alpha^2}$$

$$\text{und Cos. } \alpha^2 = \frac{1}{\text{Sec. } \alpha^2}$$

also

$$dy = \frac{d \text{ tg. } \alpha}{1 + (1 + e) \text{. tang. } \alpha^2}$$

Setzt man $(1 + e) \text{. tg. } \alpha^2 = x^2$, so wird $\text{tg. } \alpha = \frac{x}{\sqrt{(1+e)}}$

$$\text{und } dy = \frac{dx \text{. } \sqrt{\frac{1}{1+e}}}{1 + x^2}; \text{ daher}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{(1 + e)}} \text{. Arc. tg. } x$$

oder

$$\text{CLXXV. } \quad y = \frac{\text{Arc. Tang. } ((\text{tg. } \alpha) \text{. } \sqrt{(1 + e)})}{\sqrt{(1 + e)}}$$

§. 88.

Um das 2te Integral (§. 86.) zu finden, nämlich

$$\int \frac{\varepsilon m \text{. Sin. } \alpha \text{. } d\alpha}{1 + e \text{. Sin. } \alpha^2}$$

setzen wir zuerst $- d \text{ Cos. } \alpha$ statt $\text{Sin. } \alpha \text{. } d\alpha$. Hiermit erhalten wir

$$- \int \frac{\varepsilon m \text{. Sin. } \alpha \text{. } d\alpha}{1 + e \text{. Sin. } \alpha^2} = \int \frac{\varepsilon m \text{. } d \text{ Cos. } \alpha}{1 + e \text{. Sin. } \alpha^2}$$

$$= \int \frac{2m\, d\, \text{Cos.}\, \alpha}{1 + e - e.\, \text{Cos.}\, \alpha^2} = \int \frac{2 .\, \frac{m}{e} .\, d\, \text{Cos.}\, \alpha}{\frac{1+e}{e} - \text{Cos.}\, \alpha^2}$$

$$= \frac{2m}{e} . \int \frac{d\, \text{Cos.}\, \alpha}{\frac{1+e}{e} - \text{Cos.}\, \alpha^2}$$

Es ist aber

$$\int \frac{dx}{A - Bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{AB}} .\, \text{logn.}\, \frac{x + \sqrt{\frac{A}{B}}}{-x + \sqrt{\frac{A}{B}}} \; {}^{*)}$$

also

$$\int \frac{d\, \text{Cos.}\, \alpha}{\frac{1+e}{e} - \text{Cos.}\, \alpha^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+e}{e}}} .\, \text{ln.}\, \frac{\text{Cos.}\, \alpha + \sqrt{\frac{1+e}{e}}}{-\text{Cos.}\, \alpha + \sqrt{\frac{1+e}{e}}}.$$

Multiplicirt man zur Rechten im logarithmischen Ausdruck im Zähler und Nenner mit $\frac{\sqrt{\frac{e}{1+e}}}{\text{Cos.}\, \alpha}$, so erhält man

$$\int \frac{d\, \text{Cos.}\, \alpha}{\frac{1+e}{e} - \text{Cos.}\, \alpha^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+e}{e}}} .\, \text{ln.}\, \frac{1 + \text{Cos.}\, \alpha .\, \sqrt{\frac{e}{1+e}}}{1 - \text{Cos.}\, \alpha .\, \sqrt{\frac{e}{1+e}}}$$

Daher

---

*) S. m. Anfangsgründe der Analysis und höheren Geometrie, welche zur Ostermesse 1817 in eben dieser Verlagshandlung erscheinen werden.

$$\text{CLXXVI.} \int \frac{\varepsilon m . \text{Sin.}\, \alpha . d\alpha}{1 + e . \text{Sin.}\, \alpha^2} . \text{ln.} \frac{1 + \text{Cos.}\, \alpha . \sqrt{\frac{e}{1+e}}}{1 - \text{Cos.}\, \alpha . \sqrt{\frac{e}{1+e}}}$$

§. 89.

Es ist jetzt noch die 3te Integrirung (§. 86.) übrig

$$\int \frac{2 v \zeta \mathfrak{Q} . \text{Sin.}\, \alpha . \text{Cos.}\, \alpha . d\alpha}{\Pi + \mathfrak{Q} . \text{Sin.}\, \alpha^2}$$

Dieser Ausdruck bezieht sich auf den Einfluß, den die Schwungkraft auf die Bewegung des Gatters also auch auf die der Warze hat.

Die Schwungkraft ist im Allgemeinen $= \frac{2v}{r}$. Es sey nun die Geschwindigkeit der Warze z. B. = 8 Par. Fuß so ist $v = \frac{64}{60}$; wäre nun $r = 1'$, so wird die Schwungkraft = 1,066 also größer als unsere Schwerkraft. Sie wirkt am Ende eines beliebigen Bogens α als eine Kraft $= \frac{2v}{r} . \text{Sin.}\, \alpha . \text{Cos.}\, \alpha . \mathfrak{Q}$ der Bewegung des Gatters entgegen, befördert also diese Bewegung, wenn α zwischen 90 und 180° fällt. Ihre Wirkung ist daher in der Mitte eines jeden Quadranten am größten, nämlich $= \frac{v}{r} . \mathfrak{Q}$.

Inzwischen trit zur Verminderung des ungleichförmigen Gangs der vortheilhafte Umstand ein, daß die entgegengesetzten Wirkungen der Schwungkraft in jeder Bahnhälfte beide nach einander und zwar in gleichem Maaße vorkommen. Um so unbedeutender ist daher auch im Ganzen der Einfluß der Schwungkraft auf die Bewegung der Masse $\mathfrak{Q}$, wenn sich der Krumzapfen unmittelbar an der Wasserwelle befindet,

indem dann allemal $\frac{v}{r}$ eine kleine Größe wird. Nur mittelst eines Vorgeleges kann der Einfluß bemerkbar werden. Dann fallen aber auch der größte und kleinste Werth von v so nahe zusammen, daß die Veränderlichkeit von v ganz bei Seite gesetzt werden kann. Die Nichtachtung dieser Veränderlichkeit von v bei der 3ten Integrirung giebt nämlich für den Einfluß, den die Schwungkraft auf die Bewegung hat, einen Ausdruck, der nur äußerst wenig von der völligen Schärfe abweichen kann; und da ihr gesammter Einfluß schon geringe ist, so fehlt man hiermit nur um einen sehr kleinen Theil einer Größe, die selbst nur einen kleinen Theil des zu bestimmenden Ganzen ausmacht, und ein solcher Fehler kann in dergleichen auf die Ausübung abzweckenden Untersuchungen allemal für Null genommen werden.

Es mag also v groß oder klein seyn, so sind wir allemal berechtigt, diese 3te Integration so zu behandlen, als wäre v unveränderlich. Hiernach läßt sich also unser 3tes Integral auch so schreiben

$$2v\zeta\mathfrak{Q}.\int\frac{\text{Sin.}\,\alpha}{\Pi+\mathfrak{Q}.\,\text{Sin.}\,\alpha^2}.\,\text{Cos.}\,\alpha.\,d\alpha.$$

§. 90.

Wir setzen nunmehr

$$\Pi+\mathfrak{Q}.\,\text{Sin.}\,\alpha^2=x^2$$

Dieses giebt

$$\mathfrak{Q}.\,\text{Sin.}\,\alpha.\,d.\,\text{Sin.}\,\alpha=x.\,dx$$

$$\frac{\text{Sin.}\,\alpha.\,d\,\text{Sin.}\,\alpha}{\Pi+\mathfrak{Q}.\,\text{Sin.}\,\alpha^2}=\frac{x.\,dx}{\mathfrak{Q}x^2}=\frac{dx}{\mathfrak{Q}x}$$

also

$$\int\frac{\text{Sin.}\,\alpha.\,d\,\text{Sin.}\,\alpha}{\Pi+\mathfrak{Q}.\,\text{Sin.}\,\alpha^2}=\frac{\text{logn.}\,x}{\mathfrak{Q}}.$$

und

$$2v\zeta\mathfrak{Q}.\int\frac{\text{Sin.}\,\alpha,\ d\,\text{Sin.}\,\alpha}{\Pi+\mathfrak{Q}.\,\text{Sin.}\,\alpha^2}=2v.\,\text{ln.}\,x$$
$$=v\zeta\,\text{ln.}\,(\Pi+\mathfrak{Q}.\,\text{Sin.}\,\alpha^2)$$

Die gefundenen 3 Integralien geben also nunmehr zusammengenommen

$$\text{CLXXVII.}\quad v=\frac{(P-q).\,r}{\Pi}.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{Arc. Tang. tg.}\,\alpha\sqrt{(1+e)}}{1+e}\\[2ex] +\dfrac{\zeta m}{2\sqrt{e}.\,(1+e)}.\,\text{ln.}\,\dfrac{1+\text{Cos.}\,\alpha\sqrt{\dfrac{e}{1+e}}}{1-\text{Cos.}\,\alpha\sqrt{\dfrac{e}{1+e}}}\end{array}\right.$$
$$-\zeta v.\,\text{ln.}\,(\Pi+\mathfrak{Q}.\,\text{Sin.}\,\alpha^2)+\text{Const.}$$

§. 91.

Die Bestimmung der Konstante erfordert jetzt noch eine besondere Aufmerksamkeit.

Unsere Formel (CLXXVII) gründet sich auf die Voraussetzung, daß zwischen Kraft und Last ein Verhältniß eintrete, wobei der Beharrungsstand der Maschine statt habe. Dieser ist aber nur dann möglich, wann die Bewegung so beschaffen ist, daß in jeder bestimmten Stelle der Kreisbahn die Warze bei jedem Umlaufe immer wieder mit derselben Geschwindigkeit ankommt.

Wir wollen daher annehmen, sie komme im Beharrungsstande in der Stelle d allemal mit einer Geschwindigkeit an, welche der Höhe h zugehöre, so erhalten wir den Werth der Konstante, indem wir sie so nehmen, daß, für $\alpha = 0$, $v = h$ werde. Also

$$h = \frac{(P - q) \cdot r}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon m}{2\sqrt{e} \cdot (1 + e)} \cdot \ln. \frac{1 + \sqrt{\frac{e}{1+e}}}{1 - \sqrt{\frac{e}{1+e}}} - \zeta h \cdot \ln. \pi + \text{Const.}$$

Hieraus wird

$$\text{Const.} = (1 + \zeta \cdot \ln. \pi) \cdot h - \frac{(P - q) \cdot r}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon m}{2\sqrt{e} \cdot (1 + e)} \times \ln. \frac{1 + \sqrt{\frac{e}{1+e}}}{1 - \sqrt{\frac{e}{1+e}}}$$

und daher

$$\text{CLXXVIII.}\quad v = \frac{(P - q) \cdot r}{\pi \cdot \sqrt{(1 + e)}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{Arc. Tang. } (\text{tg. } \alpha) \cdot \sqrt{(1 + e)} \\ + \frac{\varepsilon m}{2\sqrt{e}} \cdot \ln. \frac{\left(1 + \text{Cos. } \alpha \sqrt{\frac{e}{1+e}}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{e}{1+e}}\right)}{\left(1 - \text{Cos. } \alpha \cdot \sqrt{\frac{e}{1+e}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{e}{1+e}}\right)} \end{array} \right\}$$
$$- \zeta v \cdot \ln. (\pi + \mathfrak{Q} \cdot \text{Sin. } \alpha^2) + (1 + \zeta \cdot \ln. \pi) \cdot h$$

§. 92.

Es ist jetzt noch die Schwierigkeit übrig, die **mittlere** Geschwindigkeit der Warze zu bestimmen, deren zugehörige Höhe wir mit h bezeichnen wollen.

Die Warze, welche mit der zu 𝔥 gehörigen Geschwindigkeit in d ankommt, muß offenbar bis zu einer gewissen Gränze z. B. bis in a ihren Weg mit beschleunigter Bewegung fortsetzen, daß also ihre Geschwindigkeit in d nicht das Maximum seyn kann. Ueber jene Gränze hinaus muß ihre Geschwindigkeit wieder bis zu p (af = fp genommen) abnehmen, daß sie also in f, der Mitte zwischen a und p, kein Minimum seyn kann. Ihr Minimum fällt in p. Von p bis g wird die Bewegung wieder beschleunigt, und die Geschwindigkeit in g muß, wenn Beharrungsstand möglich seyn soll, wieder der in d gleich seyn; so auch in e wieder so groß als in f. Suchen wir nun für die Voraussetzung, daß die Geschwindigkeitshöhe in d = 𝔥 seyn soll, die Geschwindigkeitshöhe in f, so dürfen wir nur in obiger Gleichung $\alpha = 90^\circ$ setzen. Hiermit erhalten wir

$$\text{Arc. Tang.}\left((\text{tg.}\,\alpha)\sqrt{(1+e)}\right) = \text{Arc. } 90^\circ = \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\text{Cos.}\,\alpha = 0$$

$$\text{Sin.}\,\alpha = 1$$

also vermöge (CLXXVIII)

$$(1 + \zeta.\,\text{ln.}\,(\Pi + \mathfrak{Q})).\,v = \frac{(P - q).\,r}{\Pi.\,\sqrt{(1+e)}}.\left\{\frac{1}{2}\pi + \frac{\varepsilon m}{2\sqrt{e}}.\,\text{ln.}\,\frac{1 - \sqrt{\frac{e}{1+e}}}{1 + \sqrt{\frac{e}{1+e}}}\right\}$$

$$+ (1 + \zeta . \ln. \pi) . \mathfrak{h}$$

und daher

$$\text{CLXXIX.}\quad v = \frac{\dfrac{(P - q) . r}{\pi . \sqrt{(1 + e)}} . \left\{ \frac{1}{2} . \pi + \dfrac{\varepsilon m}{2\sqrt{e}} . \ln. \dfrac{1 - \sqrt{\dfrac{e}{1 + e}}}{1 + \sqrt{\dfrac{e}{1 + e}}} \right\} + (1 + \zeta . \ln. \pi) . \mathfrak{h}}{1 + \zeta . \ln. (\pi + \mathfrak{Q})}$$

Sind nun größte und kleinste Geschwindigkeit im Beharrungsstand von der mittleren wenig verschieden, so kann man sowohl v als $\mathfrak{h} = h$ setzen (= der mittleren Geschwindigkeitshöhe), und hiermit erhält man

$$\text{CLXXX.}\quad h = \frac{\dfrac{(P - q) . r}{2 \mathfrak{Q} \sqrt{\dfrac{1 + e}{e}}} . \pi - \dfrac{\varepsilon m}{\sqrt{e}} . \ln. \dfrac{1 + \sqrt{\dfrac{e}{e + 1}}}{1 - \sqrt{\dfrac{e}{e + 1}}}}{\zeta . \ln. (e + 1)}$$

Dieses ist die gesuchte Fundamentalformel für die Theorie des Krumzapfens, aus der sich nunmehr die einzelnen hierher gehörigen Fragen beantworten lassen. Dabei ist alles auf den Umfang der Kurbelbahn reducirt. Sie giebt

$$\text{CLXXXI.}\quad P - q = \frac{2\zeta h}{\pi r} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \left(\frac{e+1}{e}\right) \cdot \ln.\,(e+1) + \frac{2Q}{\pi\sqrt{e}} \cdot \ln.\,\frac{1+\sqrt{\frac{e}{e+1}}}{1-\sqrt{\frac{e}{e+1}}}$$

$$\text{CLXXXII.}\quad Q = \frac{\pi \cdot (P-q) - \frac{2\zeta h}{r} \cdot \mathfrak{Q}\left(\sqrt{\frac{e+1}{e}}\right) \cdot \ln.\,(e+1)}{2 \cdot \ln.\,\frac{1+\sqrt{\frac{e}{e+1}}}{1-\sqrt{\frac{e}{e+1}}}} \cdot \sqrt{e}$$

§. 75.

Um diese Formel näher kennen zu lernen, dienen nachstehende berechnete Werthe von

$$\frac{\sqrt{e}}{\ln.\,\frac{1+\sqrt{\frac{e}{e+1}}}{1-\sqrt{\frac{e}{e+1}}}}$$

Setzt man nämlich darin nach und nach $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ .... $\frac{1}{10}$ so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } e = \frac{1}{2} \\ \phantom{\text{Für } e} = \frac{1}{3} \\ \phantom{\text{Für } e} = \frac{1}{4} \\ \phantom{\text{Für } e} = \frac{1}{5} \\ \phantom{\text{Für } e} = \frac{1}{6} \\ \phantom{\text{Für } e} = \frac{1}{7} \\ \phantom{\text{Für } e} = \frac{1}{8} \\ \phantom{\text{Für } e} = \frac{1}{9} \\ \phantom{\text{Für } e} = \frac{1}{10} \end{array}\right. \quad \left.\frac{\sqrt{e}}{\text{ln.}\,\dfrac{1 + \sqrt{\dfrac{e}{e+1}}}{1 - \sqrt{\dfrac{e}{e+1}}}}\right\} \quad \begin{array}{l} = 0,531 \\ = 0,525 \\ = 0,520 \\ = 0,518 \\ = 0,513 \\ = 0,510 \\ = 0,509 + \\ = 0,509 + \\ = 0,509 - \end{array}$$

Für noch kleinere Werthe von e $\left(\text{oder } \frac{\Omega}{\Pi}\right)$ nimmt der Werth des logarithmischen Bruchs allmälig ab, doch kommt er nie unter 0,5.

Dieses läßt sich allgemein so beweisen:

Wenn e klein ist, so erhält man nachstehende schnell konvergirende Reihe:

$$\text{ln.}\,(e + 1) = e - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{4}e^4 + \text{etc.}$$

$$\ln.\frac{1+\sqrt{\frac{e}{e+1}}}{1-\sqrt{\frac{e}{e+1}}} = 2.\left(\sqrt{\frac{e}{e+1}} + \frac{1}{3}.\frac{e}{e+1}\sqrt{\frac{e}{e+1}} + \frac{1}{5}.\left(\frac{e}{e+1}\right)^2\sqrt{\frac{e}{e+1}} + \text{etc.}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{e}{e+1}}\right).\left(1 + \frac{1}{3}.\frac{e}{e+1} + \frac{1}{5}.\left(\frac{e}{e+1}\right)^2 + \frac{1}{7}.\left(\frac{e}{e+1}\right)^3 + \text{etc.}\right)$$

also

$$\frac{\sqrt{e}}{\ln.\frac{1+\sqrt{\frac{e}{e+1}}}{1-\sqrt{\frac{e}{e+1}}}} = \frac{\sqrt{(e+1)}}{2.\left(1 + \frac{1}{3}.\frac{e}{e+1} + \frac{1}{5}.\left(\frac{e}{e+1}\right)^2 + \frac{1}{7}.\left(\frac{e}{e+1}\right)^3 + \text{etc.}\right)}$$

Je kleiner nun e genommen wird, desto weniger steigt der Zähler zur Rechten über 1 und der Nenner über 2, daher kommt der logarithmische Bruch desto näher an $\frac{1}{2}$, je kleiner e wird, und für $e = \frac{1}{\infty}$ wird er in aller Schärfe $= \frac{1}{2}$.

Da nun obiges Täfelchen ergiebt, daß eben dieser Bruch schon für $e = \frac{1}{6}$ für die Ausübung nicht mehr merklich von $\frac{1}{2}$ verschieden ist, und π allemal so genommen werden kann, daß e wenigstens nicht $> \frac{1}{6}$ ist, so können wir für die Ausübung allemal

CLXXXIII. $Q = \frac{1}{2} \varepsilon . \pi . (P - q) - \frac{\zeta h}{\varepsilon r} . \mathfrak{Q} . \left(\sqrt{\frac{e+1}{e}}\right) . \ln . (e+1)$

setzen. Dabei ist

Für $e = \frac{1}{6}$ $\left(\sqrt{\frac{e+1}{e}}\right) . \ln . (e+1) = 0,407$

$= \frac{1}{7}$ $= 0,376$

$= \frac{1}{8}$ $= 0,354$

$= \frac{1}{9}$ $= 0,333$

$= \frac{1}{10}$ $= 0,316$

Würde e sehr klein, so daß $\ln . (1 + e) = e$, und $\sqrt{\frac{e+1}{e}} = \sqrt{\frac{1}{e}}$ gesetzt werden könnte, so würde

$$\left(\sqrt{\frac{e+1}{e}}\right) . \ln . (e+1) = e . \sqrt{\frac{1}{e}} = \sqrt{e}$$

Dieses ist aber auch schon sehr genau der Fall für $e = \frac{1}{6}$; denn es ist $\sqrt{\frac{1}{6}} = 0,408$, und nach vorstehenden $\left(\frac{e+1}{e}\right) . \ln . (e+1) = 0,407$.

Man kann also für die Voraussetzung, daß e nicht $> \frac{1}{6}$ sey, $\left(\sqrt{\frac{e+1}{e}}\right) . \ln . (e+1) = \sqrt{e}$ setzen, und so erhält man

$$\text{CLXXXIV.} \begin{cases} Q = \frac{1}{2} \varepsilon \pi (P - q) - \frac{\zeta h}{\varepsilon r} . \mathfrak{Q} . \sqrt{e} \\ \quad = \frac{1}{2} \varepsilon \pi . (P - q) - \frac{\zeta h}{\varepsilon r} . \mathfrak{Q} . \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{n}}} \end{cases}$$

Hiermit ist alles transscendentische aus der Formel beseitigt, und sie hat noch mehr Genauigkeit, als für die Ausübung nöthig wäre. In der That bleibt sie noch für $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{n}} = \frac{1}{2}$ in der Ausübung hinlänglich brauchbar.

§. 94.

Der allgemeine Ausdruck (CLXXXIV) ist für alle in Bezug auf Maschinen, die mit dem Krumzapfen betrieben werden, von großer Wichtigkeit. Sie belehrt uns gleich beim ersten Anblick:

bei einer gegebenen Kraft P ist die Last, welche sie zu betreiben vermag, desto größer

1) je kleiner $\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}$ ist; aber auch bei einerlei Werthe von $\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}$ desto größer,

2) je kleiner $\mathfrak{Q}$ ist

3) je kleiner h

4) je größer ε ist.

Ist $\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}$ so klein, daß der Werth von $\frac{\zeta h}{\varepsilon r} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}}$ für Null angenommen werden kann, so wird

$$\text{CLXXXV.} \begin{cases} Q = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\pi \cdot (P - q) = \varepsilon \cdot 1{,}57 \cdot (P - q) \\ P = \frac{0{,}637}{\varepsilon} \cdot Q + q \end{cases}$$

welches die Ausdrücke sind, die von andern Schriftstellern allgemein gebraucht werden (§. 81).

Ist Q = 0 oder gar keine Last an der Warze angebracht, so ist bei anderen Schriftstellern schlechthin P = q; es ist aber nach (CLXXXIV), für Q = 0,

$$\text{CLXXXVI.} \quad P = \frac{2\zeta h}{\varepsilon^2 \pi r} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}} + q$$

Es sey z. B. vermöge eines Vorgeleges h = 0,4'; r = 1', $\mathfrak{Q}$ = 10 K. F. Wasser, Π = 90 K. F. W. q = 0,5 K. F. ε sowohl als ζ sehr nahe = 1, so wird, für Q = 0,

$$P = \frac{2 \cdot 0,4}{3,14 \cdot 1} \cdot 10 \cdot \sqrt{\frac{10}{90}} + 0,5$$

$$= 1,349 \text{ K. F. Wasser.}$$

Wäre die Geschwindigkeit des Wasserrades $= 5'$, so wäre die zugehörige Geschwindigkeitshöhe in Par. F. $= \frac{25}{60} = 0,41'$; also

$$P = \frac{0,41}{0,40} \cdot 1,349 = 1,38 \text{ K. F. W.}$$

hingegen nach der gewöhnlichen Rechnung nur $p = \frac{0,41}{0,40} \cdot 0,5$ $= 0,51$ K. F. W.

Allgemein wird aus (CLXXXIV)

$$\text{CLXXXVII. } P = \frac{2Q}{\varepsilon\pi} + \frac{2\zeta h}{\varepsilon^2 \pi r} \cdot \Omega \cdot \sqrt{\frac{\Omega}{\Pi}} + q$$

oder

$$\text{CLXXXVIII. } P = \frac{Q}{\frac{1}{2}\varepsilon \cdot \pi} + q + \frac{\zeta h}{\frac{1}{2}\varepsilon^2 \pi r} \cdot \Omega \cdot \sqrt{\frac{\Omega}{\Pi}}$$

wo das letzte Glied zur Rechten die wegen der Masse Ω erforderliche Ueberwucht ist. Man kann diese Gleichung ohne Bedenken noch für $\frac{\Omega}{\Pi} = \frac{1}{2}$ anwenden.

Ex. Es sey vermöge Vorgelegs $h = 0,41'$; $r = 1'$; $\Omega = 10$ K. F. W. $\Pi = 20$ K. F. W. $Q = 5$ K. F. W. $q = 0,5$ und ε wie ζ sehr genau $= 1$; so wird

$$P = \frac{10}{1,57} + 0,5 + \frac{0,41}{1,57} \cdot 10 \cdot \sqrt{\frac{10}{20}}$$

$$= 6,37 + 0,50 + 1,84 = 8,71 \text{ K. F. W.}$$

wofür die gemeine Berechnung nur 7,87 K. F. giebt, indem dabei die bedeutende Ueberwucht von 1,84 K. F. ganz verlohren geht.

Ist des Rades Geschwindigkeit = 5', so wird auch

$$p = 8{,}71 \text{ K. F.}$$

Nimmt man $\Pi = 80$ K. F. so wird die Hälfte der Ueberwucht erspart, und es bleibt nur noch

$$p = 7{,}79 \text{ K. F. W.}$$

Nur darf bei solchen Vergleichungen nicht außer Acht gelassen werden, daß mit der Vergrösserung von Π auch q vergrössert wird. Hiervon werden wir noch in der Folge reden.

§. 95.

Aus (CLXXXVII) folgt nun auch

$$\frac{2\zeta h}{\varepsilon^2 \pi r} \cdot \mathfrak{Q} \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}} = P - \left(\frac{2Q}{\varepsilon \pi} + q\right)$$

also

$$\text{CLXXXIX.}\quad h = \frac{\varepsilon^2 \pi r . \left(P - q - \frac{2Q}{\varepsilon \pi}\right)}{2\zeta \mathfrak{Q} \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}}}$$

Ist also $P - q = \frac{2Q}{\varepsilon \pi} = \frac{0{,}637 . Q}{\varepsilon}$, so wird $h = 0$, und es ist für die Bewegung kein Beharrungsstand möglich.

§. 96.

Für eine sehr kleine Geschwindigkeit in d, deren zugehörige Höhe wir mit h bezeichnen wollen, können wir in Zweifel gerathen, ob der Beharrungsstand wirklich eintreten könne. Wir erhalten nämlich aus (CLXXVIII) allgemein.

$$\text{CXC.}\ v = \frac{(P-q).\,r}{n.\sqrt{(1+e)}}.\left[\begin{array}{l}\text{Arc. Tang.}\,(\text{tg.}\,\alpha).\sqrt{(1+e)} \\ +\dfrac{s\,m}{2\sqrt{e}}.\,\text{ln.}\dfrac{\left(1+\text{Cos.}\,\alpha\sqrt{\frac{e}{1+e}}\right).\left(1-\sqrt{\frac{e}{1+e}}\right)}{\left(1+\text{Cos.}\,\alpha\sqrt{\frac{e}{1+e}}\right).\left(1-\sqrt{\frac{e}{1+e}}\right)}\end{array}\right] + h.\left(1+\zeta.\text{ln.}\frac{n}{n+\Omega.\text{Sin.}\,\alpha^2}\right)$$

wo wir zur Rechten h statt v und h gesetzt haben. Ist nun Ω sehr groß, so könnte für einen gewissen Bogen α der Werth von v verneint werden, welches dann zu erkennen gäbe, daß die Bewegung nicht bis zum Ende dieses Bogens fortdauern könnte, da sie schon vorher = 0 geworden seyn müßte. Es könnte z. B. die größte Geschwindigkeit = 6″, die kleinste = — 2″ und daher die mittlere gar wohl bejaht seyn. Dann könnte aber der arithmetisch=mittlere Werth offenbar nicht physisch statt finden. Diese Prüfung läßt sich bei kleinen Werthen von h leicht anstellen. Indessen kommen solche Fälle fast nie vor. Doch war die Bemerkung um der Möglichkeit willen nöthig. Man ersieht wenigstens daraus, daß nicht jede verlangte sehr kleine Geschwindigkeit der Kurbelwarze mit dem Beharrungsstande bestehen kann. Uebrigens giebt aber für so sehr verschiedene Geschwindigkeiten der Warze in ihrer Bahn, wobei die mittlere um einen etwas beträchtlichen aliquoten Theil von der größten und kleinsten Geschwindigkeit abweicht, unsere Formel nicht hinlängliche Genauigkeit, weil in solchen Fällen P auch nicht als nur beiläufig unveränderlich angesehen werden kann, wie es doch die Formel voraussetzt. Doch wird deßhalb auch für solche Fälle unsere Formel nicht unnütz. Eine Prüfung nach (CXC) zeigt nämlich ob es eine merklich größere

Geschwindigkeit in der Bahn gebe, als die zu h gehörige. Da nun ungleichförmiger Gang soviel möglich vermieden werden muß, so erhalten wir hiermit zugleich die Weisung, die Bestimmungsstücke gehörig abzuändern. Außerdem kommt aber auch das Aufschlagewasser selbst der Fortdauer der Bewegung zu Hülfe (s. unten §. 100).

§. 97.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Wasserrades mit c, die der Kurbelwarze mit C, so ist ohne Vorgelege allemal $c = \frac{R}{r} \cdot C$; aber bei einem Vorgelege hängt das Verhältniß $\frac{c}{C}$ ganz von uns ab. Es ist allemal in der Bedeutung (LVII)

$$\text{CXCI.} \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{n}{N} \cdot \frac{R}{r} \cdot C \text{ für ein einfaches Vorgelege.} \\ c = \frac{n \,.\, n'}{N \,.\, N'} \cdot \frac{R}{r} \cdot C \text{ für ein doppeltes —} \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir die gesammte Nebenlast, mit der die Kurbelstange in keiner Verbindung steht, auf den mechanischen Umfang des Rades gebracht, mit ϕ, die eben dahin reducirte Kraft mit p, so ist

$$\text{CXCII.} \quad P - q = \frac{c}{C} \cdot (p - \phi)$$

Daher aus (CLXXXIV)

$$\text{CXCIII.} \left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{1}{2} \varepsilon \pi \cdot \frac{c}{C} \cdot (p - \phi) - \frac{\xi h}{\varepsilon r} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{n}} \\ \text{oder} \\ Q = \frac{1}{2} \varepsilon \pi \cdot \frac{c}{C} \cdot (p - \phi) - \frac{\xi C^2}{4 \varepsilon r g} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{n}} \end{array} \right.$$

und aus (CLXXXVIII)

CXCIV.

$$P = \frac{Q \cdot C}{\frac{1}{2}\epsilon\pi \cdot c} + \frac{C \cdot \zeta C^2 \cdot \Omega}{\frac{1}{2}\epsilon\pi 4\epsilon r g \cdot c} \cdot \surd \cdot \frac{\Omega}{\Pi} + \phi$$

oder

$$P = \frac{C}{\frac{1}{2}\epsilon\pi C} \cdot \left(Q + \frac{\zeta C^2 \Omega}{4\epsilon r g} \cdot \surd \frac{\Omega}{\Pi}\right) + \phi$$

§. 98.

Es ist oben (§. 94 am Ende) schon bemerkt worden, daß die auf Verminderung der erforderlichen Kraft abzwekkende Vergrösserung von Π nicht über eine gewisse Gränze hinausgehen dürfe, weil mit Vergrösserung der Masse auch die davon herrührende Reibung, worauf sich hier ϕ bezieht, vergrössert wird, und dieses Wachsthum der Last das der Kraft endlich nothwendig übersteigen muß. Um nun hierüber zu näheren Bestimmungen zu gelangen, zerlegen wir Π und ϕ in zwei Theile, nämlich

$$\Pi = \Pi' + \Pi''; \; \phi = \phi' + \phi''$$

Es versteht sich, daß das Gesetz der Festigkeit das erste ist, welches bei der Dicke der Radkränze beobachtet werden muß. Die außerdem noch erforderliche Dicke, um den vortheilhaftesten Werth von Π zu erhalten sey δ, die Breite eines Kranzes $= \beta$, der mittlere Halbmesser $= \mathfrak{R}$, so kann man hier

CXCV. Die noch hinzukommende Masse der Kränze $= 6{,}28 \cdot \mathfrak{R} \cdot \delta \beta$ K. F. W.

setzen; und

Reducirter Werth dieser Masse auf den Umfang der Kurbelbahn $= \frac{c^2}{C^2} \cdot 6{,}28 \cdot \mathfrak{R} \cdot \delta \beta \cdot \frac{\mathfrak{R}}{R}$

Dieser Werth ist $= \Pi''$, der übrige Theil von Π ist Π', also

$$\text{CXCVI.}\left\{\begin{array}{l} \Pi'' = \frac{c^2}{C^2} \cdot 6{,}28 \cdot \mathfrak{R} \cdot \delta\beta; \\ \Pi' \text{ ist durch die zur Festigkeit erforderliche Masse} \\ \quad \text{bestimmt.} \end{array}\right.$$

Vermöge (CXCV) wird $\phi'' = \frac{\rho}{R} \cdot \mu \cdot 6{,}28\ \mathfrak{R}' \cdot \delta\beta$ wo ρ den Halbmesser der Wellzapfen bezeichnet; wir setzen dafür

$$\text{CXCVII.}\ \phi'' = \frac{\rho}{R} \cdot \mathfrak{R} \cdot \delta\beta; \text{ also } \phi' = \phi - \phi''.$$

Hiernach erhalten wir aus (CXCIV)

$$\text{CXCVII.}\ p = \frac{C}{\frac{1}{2} s \pi c} \cdot \left(Q + \frac{\zeta C^2 \mathfrak{Q}}{4 s r g} \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi' + \frac{c^2}{C^2} \cdot 6{,}28 \cdot \frac{\mathfrak{R}^2}{R} \cdot \delta\beta}}\right)$$

$$+ \phi' + \frac{\rho}{R} \cdot \mathfrak{R} \cdot \delta\beta$$

Nehmen wir nun δ als veränderlich an, so kommt es darauf an, denjenigen Werth von δ anzugeben, für welchen der Werth von p ein Minimum wird. Wir haben also, indem wir $\frac{\zeta C^3 \mathfrak{Q} \sqrt{\mathfrak{Q}}}{2 \pi s^2 r g c} = A$, $\frac{c^2}{C^2} \cdot 6{,}28 \cdot \frac{\mathfrak{R}^2}{R} \cdot \beta = B$ und $\frac{\rho}{R} \cdot \mathfrak{R}\beta = E$ setzen,

$$\sqrt{\frac{A}{(\Pi' + B \cdot \delta)}} + E \cdot \delta = \text{Minim.}$$

Die Differentirungsmethode giebt

$$\text{CXCVIII.}\left\{\begin{array}{l} \delta = \dfrac{\left(\frac{AB}{E}\right)^{\frac{2}{3}} - \Pi'}{B} \\ \text{oder} \\ \delta = \dfrac{\left(\sqrt[3]{\frac{AB}{E}}\right)^2 - \Pi'}{B} \end{array}\right.$$

Ex. Es sey mittelst eines Vorgeleges $C = c = 5'$; $\rho = \frac{1'}{5}$, $R = 7'$, $\mathfrak{R} = 6'$, $r = 1'$, $\beta = 0,7'$; $\Omega = 16$ K. F. W. so ist, ζ und $\varepsilon = 1$ gesetzt, in Par. Maaß

$$A = \frac{25 \cdot 16 \cdot 4}{6,28 \cdot 15} = 17;$$

$$B = 6,28 \cdot \frac{36}{7} \cdot 0,7 = 22,6;$$

$$E = \frac{1}{35} \cdot 6 \cdot 0,7 = 0,12$$

Um π' zu bestimmen, nehmen wir die zur Festigkeit erforderliche Dicke $= \frac{1'}{3}$ für einen Kranz. Wir setzen zwei Kränze voraus, also

Festigkeitsmasse $= 6,28 \cdot 6 \cdot 0,7 \cdot \frac{2}{3}$ $=$ der Kränze	17,58 K. F. W.
Wegen der Aerme, Schaufeln, Welle- und Stirnrad setzen wir noch hinzu	5,42 —
	23 K. F. W.

Diese Masse auf den Umfang der Kurbelbahn reducirt, giebt $\frac{c^2 \cdot 36}{C^2 \cdot 49} \cdot 23 = 16,4$ K. F.

Also $\pi' = 16,4$ K. F. W.

Demnach

$$\delta = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{17 \cdot 22,6}{0,12}}\right)^2 - 16,4}{22,6} = 7,8'$$

und daher

$$\pi'' = 6,28 \cdot 6 \cdot 0,7 \cdot 7,8 \frac{36}{49} = 171$$

Folglich $\pi = \pi' + \pi'' = 16,4 + 171 = 187,4$

Wäre Q = 10 K. F. W. so hätte man aus (CXCIV)

$$p = 0{,}637 \cdot \left(10 + \frac{25 \cdot 16}{60} \sqrt{\frac{16}{187}}\right) + \phi$$

wo wir ϕ = 2 K. F. W. setzen können, also

$$p = 0{,}637 \cdot \left(10 + \frac{20}{3} \sqrt{0{,}0855}\right) + 2$$

$$= 0{,}637 \cdot (10 + 1{,}93) + 2$$

Da indessen über einen gewissen Werth von δ hinaus die fernere Vergrösserung dieses Werths selbst nach dieser Berechnung keinen bedeutenden Einfluß auf fernere Verminderung von p hat, hierbei aber auch noch erwogen werden muß, daß so schwere Räder stärkerer Wellzapfen bedürfen, so daß ρ größer genommen werden muß, womit also der Werth von ϕ aufs Neue vergrössert wird, so kann man für alle Fälle der Ausübung beim Gebrauche des Krumzapfens folgende praktische Bestimmung festsetzen

$$\text{CXCIX.} \quad \delta = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{AB}{E}}\right)^2 - n'}{2B}$$

Wir würden also im vorstehenden Beispiele den beiden Kränzen zusammengenommen zu ihrer Normaldicke von $\frac{2'}{3}$ noch 4' zusetzen; so daß ihr Durchschnitt 4,66 . 0,7 = 3,262 Q. F. betrüge.

Da übrigens nach unserer obigen Forderung (§. 77. No. 12.) auch die Kropfräder einen Boden erhalten, welcher selbst einen dicken und breiten Kranz bilden kann, so kann ohne bedeutende Verstärkung der gewöhnlichen Radkränze die erforderliche Zugabe in allen Fällen durch hinlängliche Dicke des gedachten äußeren, und bei oberschlächtigen Rädern durch hinlängliche Dicke des inneren Radbodens sehr leicht bewirkt werden.

§. 99.

Aus (CXCIV) wird

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\pi c\,(p-\phi) = Q\,.\,C + \frac{\zeta\,\Omega\sqrt{\frac{\Omega}{n}}}{4\varepsilon r g}\,.\,C^3$$

also

$$\text{CC.}\quad C^3 + \frac{4\varepsilon r g\,Q}{\zeta\,\Omega}\left(\sqrt{\frac{\Omega}{n}}\right).\,C - \frac{2\varepsilon^2\pi r g c\,(p-\phi)}{\zeta\,\Omega\,.\,\sqrt{\frac{\Omega}{n}}} = 0$$

woraus sich C giebt, wenn alles übrige vorgeschrieben oder bestimmt ist.

§. 100.

Alle bisherige Formeln setzen voraus, daß sowohl p als Q beim Umlaufe der Kurbel in beiden Hälften ihrer Bahn gleich groß sey. Ist Q unveränderlich, und die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel wirklich größer als die des Rades (wie solches durch ein Vorgelege bewirkt wird), so kann man auch p als beinahe unveränderlich annehmen; wenigstens bleibt dann die Ueberwucht in beiden Hälften der Kurbelbahn ohne merkbaren Unterschied dieselbe. Nicht ganz so verhält es sich aber, wenn in der einen Hälfte der Widerstand $= Q'$, in der anderen $= Q''$, und Q' von Q'' merklich verschieden ist. Doch kommt selbst die Art, wie Wasserräder in Bewegung gesetzt werden, der Verminderung der Ungleichförmigkeit der Bewegung und der Gleichstellung der Ueberwucht in beiden Hälften der Kreisbahn sehr zu Hülfe. Ist nämlich $Q' < Q''$, so nimmt beim Widerstande Q' die Geschwindigkeit der Warze zu, und das Wasserrad lauft schneller; aber mit der zunehmenden Geschwindigkeit des Wasserrades wird bei ungeändertem Wasserzuflusse nothwendig p kleiner und hiermit die Ueberwucht wieder mehr

hergestellt. Beim Widerstande Q'' wird die Geschwindigkeit des Rades kleiner, ebendarum wird nun nothwendig p wieder größer, und hiermit die Ueberwucht wieder der vorigen näher gebracht.

Hierzu kommt noch, daß nach (CXCIV) die Last welche zu Q' noch hinzukommt, mit Vergrösserung der Geschwindigkeit C im Verhältnisse des Quadrats dieser Geschwindigkeit größer, und eben so die noch zu Q'' hinzukommende Last $\left(\frac{\zeta C^2 \Omega}{4 \varepsilon r g} . \sqrt{\frac{\Omega}{\Pi}}\right)$ mit Verminderung der Geschwindigkeit C im Verhältnisse des Quadrats dieser Geschwindigkeit kleiner wird.

Aus diesen beiden Gründen können die Geschwindigkeiten der Warze in beiden Hälften ihrer Bahn bei den verschiedenen Widerständen Q' und Q'' nie sehr verschieden seyn.

Nimmt man endlich noch hinzu, daß die größere Geschwindigkeit der einen Hälfte durch die Bewegung der Masse Π noch zum Theil in die 2te Hälfte der Bahn, und dagegen die kleinere der 2ten Hälfte noch zum Theil in die 1ste übergetragen wird, so daß dadurch aufs Neue die kleinere der größeren und die größere der kleineren näher gebracht wird, so wird begreiflich, daß selbst bedeutende Ungleichheiten in den Werthen von Q und Q' keinen für die Ausübung bedeutenden Einfluß auf die Bewegung haben können, und daß wir ohne Bedenken die Sache so ansehen dürfen, als hätte die Kraft eine unveränderliche Last $Q = \frac{Q' + Q''}{2}$ zu wältigen. Durch diese Substitution behalten also auch für dergleichen Fälle unsere bisherigen Formeln in der Ausübung ihre volle Brauchbarkeit.

Anwendung vorstehender Lehren auf Wasserräder.

I. Auf oberschlächtige Räder.

§. 101.

Nach (§. 76) haben wir aus (CXLII) $p = (a + \frac{1}{3} h) . \frac{M}{c}$, oder $a = 1,6 . R$ gesetzt

$$\text{CCI.}\quad p = (1,6 . R + \tfrac{1}{3} h) . \frac{M}{c}$$

Also nach (CXCIV)

$$(1,6 . + \tfrac{1}{3} h) . \frac{M}{c} = \frac{C}{\frac{1}{2} \varepsilon \pi c} . \left(Q + \frac{\xi C^2 \Omega}{4 \varepsilon r g} . \sqrt{\frac{\Omega}{\Pi}}\right) + \phi$$

und daher

$$\text{CCII.}\quad M = \frac{\frac{2C}{\varepsilon \pi} . \left(Q + \frac{\xi C^2 \Omega}{4 \varepsilon r g} . \sqrt{\frac{\Omega}{\Pi}}\right) + \phi . c}{1,6 . R + \frac{1}{3} h}$$

Zu Fällen wie (§. 100) setzt man $\frac{Q' + Q''}{2}$ statt Q.

Man hat also

$$(1{,}6 .\ R + \tfrac{1}{3}\,h) . M - \phi c = \frac{2Q}{\varepsilon\pi} . C + \frac{\zeta\mathfrak{Q}}{2\varepsilon^2\pi r g} . \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}}\right) . C^3$$

und daher

$$\text{CCIII.}\quad C^3 + \frac{4\varepsilon r g . Q}{\zeta\mathfrak{Q}} . \left(\sqrt{\frac{\Pi}{\mathfrak{Q}}}\right) C - \frac{((1{,}6 .\ R + \tfrac{1}{3}\,h) . M - \phi c) . 2\varepsilon^2\pi r g}{\zeta\mathfrak{Q}} . \sqrt{\frac{\Pi}{\mathfrak{Q}}} = 0$$

Diese kubische Gleichung giebt uns C aus den übrigen Stücken. Die erforderliche Einrichtung des Vorgeleges giebt sich dann weiter aus (CXCI).

II. Auf unterschlächtige Räder.

§. 102.

Für diese gilt gleichfalls (CXLII). Sie giebt mit CXCIV

$$\text{CCIV.}\quad (a + \tfrac{1}{3}\,h) . \frac{M}{c} = \frac{2C}{\varepsilon\pi c} . \left(Q + \frac{\zeta C^2\mathfrak{Q}}{4\varepsilon r g} . \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}}\right) + \phi$$

Daher für M und C ganz dieselben Formeln wie CCII und CCIII nur a statt 1,6. R gesetzt.

Siebentes Kapitel.

Theorie der Sägemühlen.

§. 103.

Belidor und Karsten haben sich viel mit hierher gehörigen Untersuchungen beschäftigt. Ihre Bemühungen mußten aber schon darum mißlingen, weil sie diese Maschine als gleichförmig wirkend behandelten, wohl das Gewicht nicht aber die Masse des Gatters in Betrachtung zogen, und die Theorie des Krumzapfens noch nicht kannten. Außerdem haben sie eine unstatthafte Theorie der unterschlächtigen Wasser zum Grunde gelegt, und daraus gezogene Resultate als Resultate der Erfahrung gebraucht. Alle übrigen Schriftsteller haben es dabei belassen.

§. 104.

Unsere Säge- oder Schneidmühlen wirken bekanntlich nur beim Niedergange der in ein Gatter eingespannten Säge, welcher der Sägeplock durch die Maschine selbst nach jedem einzelnen Schnitte aufs Neue entgegen gerückt wird. Der Sägeplock setzt der niedergehenden Säge einen Widerstand entgegen, den wir dem Gewicht von W Pariser Kub. F. Wasser gleich setzen wollen.

Es sey nun

der Widerstand, den das Sägegatter, beim Niederziehen, der Kraft entgegensetzt. $\Big\} = Q'$

bei seiner Erhebung . . . . $= Q''$

so ist

$$\text{CCV.} \begin{cases} Q' = W - \mathfrak{Q} \\ Q'' = \mathfrak{Q} \end{cases}$$

indem wir die Masse des Gatters mit Zubehör $\mathfrak{Q}$ gleichfalls in Par. Kub. F. W. von gleichem Gewicht ausdrücken.

Es sey nun z. B. W = 5 K. F. W., $\mathfrak{Q}$ = 8 K. F. W. so wird

$$Q' = 5 - 8 = -3 \text{ K. F. W.}$$
$$Q'' = 8 \text{ K. F. W.}$$

Im mittleren Durchschnitt wird allemal

$$\text{CCVI. } Q = \frac{Q' + Q''}{2} = \frac{W - \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}}{2} = \tfrac{1}{2} W$$

Im vorstehenden Beispiele Q = 2,5 K. F. W.

Weil aber hiernach der Unterschied zwischen Q' und Q'' sehr groß ausfallen kann, wie dann in unserem Beispiele Q'' — Q' = 8 + 3 = 11 K. F. W. also mehr als 4mal so groß als die mittlere Last Q ist, so setzen Belidor und Karsten die Regel:

„Das Gatter mit Zubehör soll so eingerichtet werden,
„daß W — $\mathfrak{Q}$ = $\mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{Q} = \frac{1}{2}$ W werde."

Sie fürchteten, bedeutende Ungleichheit zwischen Q' und Q'' habe sehr ungleichförmigen Gang zur Folge, und hiermit gehe dann zugleich ein bedeutender Theil der angebrachten Kraft verlohren. Aus (§. 100) ist aber klar, daß bei Schneidmühlen, wo die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel allemal bedeutend größer als die des Wasserrades ist, in

Rücksicht auf Ungleichförmigkeit des Ganges nichts zu fürchten ist, wenn die Radkränze hinlängliche Masse erhalten.

Indessen war Belidor mit dieser von ihm zuerst aufgestellten Regel so wohl zufrieden, daß er deßhalb dem Sägegatter in der von ihm erbauten großen Sägemühle zu La Fere ein Gewicht = 7,67 Par. K. F. W. gab, in der Meinung, den Widerstand der eingespannten 3 Sägen richtig in Anschlag gebracht zu haben. Außerdem aber, daß er sich darin sehr irrte, hatte er hiermit den Effekt der Maschine durch dieses lästige Gatter um so mehr geschwächt, da er nur ein leichtes unterschlächtiges Straubrad dazu gebaut hatte. Nach (CCIV) ist das wegen der Masse des Gatters erforderliche Glied $= \sqrt{\frac{\zeta C^2 \mathfrak{Q}}{4 \varepsilon r g}} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\pi}}$. Hätte er also durch Verstärkung des Radkranzes π verdoppelt, und ein nur halb so schweres Gatter angeordnet, so wäre dieses Glied 4mal kleiner geworden.

§. 105.

Wenn aber auch die Regel so richtig wäre, als sie falsch ist, wie sollte ihr Genüge geschehen? Sie setzt voraus, daß W einen unveränderlichen Werth hätte. Aber dieser Werth hängt von sehr vielen wechselnden Grundbestimmungen ab. Denn

a) Je tiefer der Schnitt bei einem Zuge von bestimmter Länge in das Holz eindringen soll, desto größer ist nothwendig W.

b) Je größer die Geschwindigkeit der Säge ist, desto kleiner wird W.

c) Je mehr Sägen zugleich einschneiden, desto größer ist nothwendig W.

d) Offenbar ist auch W desto größer, je bedeutender die Dicke des Sägplocks ist.

e) Jede andere Holzart giebt beinahe einen anderen Werth für W.

f) Je trockener ein Sägplock ist, desto größer wird W.

Es ist also unmöglich, dem Gatter ein auf alle Fälle passendes Gewicht zu geben.

Hierzu kommt endlich noch, daß es noch zu sehr an Beobachtungen fehlt, um selbst für genau bestimmte einzelne Fälle W mit einiger Genauigkeit festsetzen zu können. Wir müssen mit beiläufigen Bestimmungen zufrieden seyn.

Es hat aber keine Schwierigkeit, den Schneidmühlen eine solche Einrichtung zu geben, bei welcher ihre Vollkommenheit von allen diesen Umständen unabhängig gemacht werden, und der Forderung, daß allemal $Q' = Q''$ werde, für alle Fälle Genüge geschehen kann.

§. 106.

Diese Einrichtung der Schneidmühlen, bei der es vorzüglich darauf ankommt, die Gattermasse so klein nehmen zu können, als es der Festigkeit wegen gestattet werden kann, läßt sich auf folgende Weise treffen.

1) Man bringe an jeder Schneidmühle die Säge von einem bestimmten Busen *) paarweise an, so daß die Busen von jedem Paare nach entgegengesetzter Richtung angebracht werden, daß also, indem die eine Säge im Niedergange schneidet, die andere ihren Schnitt im Hube macht.

*) Beim Niedergange der Säge schneidet solche nur dann in den Sägeplock ein, wann die oberen Zähne der Säge um etwas über die unteren vorstehen. Steht nun z. B. der oberste Zahn, auf die ganze Länge des Zugs gerechnet, um 1 1/2 Linien über den untersten vor, so hat die Säge auf die Länge des Zugs 1 1/2 Linien zum Busen.

2) Dem Gatter mit Zubehör bringe man ein Gegengewicht an, das gleiches statisches Moment hat. Man lege zu dem Ende oberhalb dem Gattergerüste auf der anderen Seite desselben, parallel mit den Gatterriegeln, eine Welle mit einem durchlaufenden horizontalen Wagbalken, welcher dem Sägplock parallel liegt. Den oberen Gatterriegel verbinde man mit dem einen Arme des horizontalen Wagbalkens durch eine lothrechte Stange. An dem anderen Arme des Wagbalkens bringe man ein Gewicht Z an, welches mit dem Q im Gleichgewicht ist. Es sey die Länge des mit dem Gatterriegel verbundenen Arms $= \Lambda$, die des anderen Arms $= \lambda$, so hat man $Z = \frac{\Lambda}{\lambda} \cdot Q$. Statt der Masse Q hat man also jetzt eine andere Q′, so daß $Q' = Q + \frac{\lambda^2}{\Lambda^2} \cdot Z$ wird, oder, weil $\frac{\lambda^2}{\Lambda^2} \cdot Z = \frac{\lambda}{\Lambda} \cdot Q$ ist.

CCVII. $Q' = \frac{\Lambda + \lambda}{\Lambda} \cdot Q$

Diese Masse wird nur sehr wenig größer als Q, wenn wir z. B. $\frac{\Lambda}{\lambda} = 5$ machen; etwa $\Lambda = 7{,}5'$ und $\lambda = 1{,}5'$.

CCVIII. Man nehme Q so klein als möglich d. h. so klein, als es die Regeln der Festigkeit erlauben.

Was nun auch für Abwechslungen eintreten mögen, so hat man allemal $Q' = Q''$, und zugleich für Q die kleinst mögliche Masse.

Ist der Widerstand, den eine Säge leidet, $= w$, und hat man N Paare von Sägen, so hat man

CCIX. $Q = Q' = Q'' = N.w.$

Auch bei den bedeutendsten Schneidmühlen kann man nie in den Fall kommen, $Q' > 4$ K. F. W. nehmen zu müssen.

Man begreift leicht den Vorzug dieser Einrichtung vor der, für welche Belidor und Karsten forderten, es solle $Q = \frac{1}{2}$ W seyn. — Eine Forderung, der auf keine Weise allgemein Genüge geschehen kann, und nach welcher in einzelnen Fällen Q zum Nachtheil des Effekts viel größer gemacht werden müßte, als es die Festigkeit erforderte. Indessen s. die Anm. zu §. 111.

§. 107.

Wir wollen nunmehr einen beiläufigen Werth von w auszumitteln suchen:

Belidor hat in seiner Archit. Hydraul. I. Th. 2 B. 2 Kap. die Beschreibung der Sägemühle zu Lafere mitgetheilt, nebst Beobachtungen über ihren Effekt. Er giebt folgende Data an:

Höhe des Wasserstandes vor der Fallschütze über der Mitte der Oeffnung	6′ — 6″
Höhe der Schützenöffnung	1 — =
Breite	2 — =
Mechanischer Halbmesser des Straubrades in einem Kropfgerinne	5 — 3″
Lebendiges Gefälle	6 — $6\frac{1}{2}$
Höhe der Schaufeln	1′ — =
Länge — —	2′ — =
Gewicht der Wasserwelle sammt Wasser- und Stirnrad	2500 ℔
Ihr Durchmesser	1′ — 4″
Ihre Länge	14′ — 8″
Das Gewicht der Trillingswelle sammt Trilling und Kurbel	240 ℔

Das Gewicht des Gatters mit eisernen Beschlägen und 3 Sägen . . . . . . 537 ℔

Geschwindigkeit der Schaufeln . . . . . 6′ — 8″

Anzahl Umläufe in 1 Min. = ... 12.

Halbmesser des Sternrades . . . . . . 2′ — 6″

Anzahl Kämme . . . . 32.

Anzahl Triebstöcke . . . . 8.

Dicke der Triebstöcke . . . . = — $2\frac{3}{4}$″

Länge des Klotzwagens . . . . 30′ — =

Länge der Zähne am Wagen . . . . . = — $1\frac{1}{2}$″

Ihre Breite . . . . = — $1\frac{1}{3}$

Der Länge nach auf jeden Fuß 4 Zähne

Durchmesser der eingreifenden Trillinge . = — 10″

Durchmesser der Triebstöcke . . . . . . = — $1\frac{1}{3}$″

Die metallenen Walzen, auf welchen die Wagenbäume laufen, liegen von Mitte zu Mitte 4′ weit von einander.

Durchmesser dieser Walzen . . . . . . = — 4″

Dicke . . . . = — 1″

Durchmesser ihrer Zapfen . . . . = — $\frac{1}{2}$″

Anzahl der Zacken am Sperrade = 384. Mit jedem Hube des Gatters werden 2 Zacken durch den Geißfuß vorwärts geschoben.

Durch eine ganze Umdrehung des Sperrades, welche in 4 Min. erfolgt, wird der Wagen um 2′ fortgerückt, also stündlich um 30′, welches zugleich die Länge des Schnitts ist.

Dieses ist nämlich der Erfolg mit eingesetzten 3 Sägen bei einem aufgelegten

12″ hohen trockenen Sägplock von Eichenholz.

In 1 Min. erfolgen 48 Schnitte bei jeder der 3 Sägen zu 6″ oder 72‴ nach der Länge des Plocks; also bringt jeder Schnitt $1\frac{1}{2}$‴ tief in den Sägplock ein.

Die Kurbel ist $1\frac{1}{4}$′ hoch, also die Länge eines ganzen Zugs = 30″.

Alles in Bezug auf Pariser Maaß und Gewicht.

§. 108.

Bei dieser Mühle beträgt das Gewicht der Wasserwelle $14{,}7 \cdot 0{,}785 \cdot (\frac{4}{3})^2 \cdot 70$ ℔ = 1403 ℔ *). Nimmt man für Aerme und Schaufeln und eisernes Beschläge 500 ℔, so bleiben für den Radkranz noch 600 ℔, wonach die Dicke des Kranzes etwa $\frac{1}{4}$ Q. Fuß betrüge, welches für die Festigkeit auch hinlänglich wäre. Wir können hiernach die Masse des Kranzes mit Inbegriff der übrigen Stücke zu etwa höchstens 10 Kub. F. Wasser am mechanischen Umfange des Rades in Rechnung bringen.

Der kubik Inhalt einer 6′ hohen Wassersäule bei 2 Q. F. Grundfläche ist = 12 K. F. W., welches das Größte ist, was wir als Kraft am mechanischen Umfange des Wasserrades in Rechnung bringen können. Hiermit haben wir

---

*) Belidor giebt den halben Durchmesser dieser Welle zu 16″ an; nach der Zeichnung ist aber der ganze nur = 16″, welches auch hinlänglich ist und damit übereinstimmt, daß das Gewicht der Welle sammt Wasser- und Stirnrade von ihm nur zu 2500 Pfund angegeben wird, wobei er selbst den K. F. Eichenholz zu 70 Pfund in Anschlag bringt.

Masse am mechanischen Umfange des Wasserrades $\Big\} = 10 + 12 = 22$ K. F. W.

Man hat ferner

$$c = 6{,}66'; \; C = \frac{1{,}25}{5{,}25} \cdot \frac{32}{8} \cdot c = 6{,}3'.$$

Also hiernach

$c = 6{,}66'$

$C = 6{,}30'$

$\frac{C}{c} = 0{,}94$

$C^2 = 39{,}70$

$R = 63''$

Halbm. der Wellz. am Wasserrade sezzen wir $= 2''$.

Den Reibungskoefficient $= \frac{1}{8}$.

$$\Pi = \left(\frac{6{,}66}{6{,}30}\right)^2 \cdot 22 = 24{,}6 \text{ K. F. W.}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{537}{70} = 7{,}67 \text{ K. F. W.}$$ nach Belidors Angabe. Weil aber die Kurbel und Kurbelstange auch in Rechnung kommen müssen, so setzen wir

$$\mathfrak{Q} = 8{,}2 \text{ K. F. W.} = \tfrac{1}{3}\,\Pi.$$

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}} = 0{,}58$$

$$g = 15' \text{ (Par.)}; \; Q'' = \mathfrak{Q} = 8{,}2 \text{ K. F. W.}$$

Die Größe des Wasserstosses können wir bei dieser Mühle nicht sehr viel höher als für ein Schnurgerinne berechnen, wie auch Belidor und Karsten selbst thun.

Da Belidor das Rad so laufen ließ d. h. mit derjenigen Geschwindigkeit, bei welcher es den größten Effekt leistete, so mußte seine Geschwindigkeit um so gewisser wenigstens der Hälfte der Geschwindigkeit des ohne Widerstand neben dem Rade vorbei ströhmenden Wassers gleich seyn, als unwidersprechlich der Effekt der Säge mit zunehmender Geschwindigkeit größer wird. Die Geschwindigkeit des freien Wassers war also höchstens $= 2 \cdot 6{,}66 = 13{,}3'$, und wir sind berechtigt, nur 13′ zu nehmen, wofür Karsten sehr unrichtig 19, 88′ setzt.

Da überdas die Schaufelflächen = 2 Q. F. waren, so konnte auch die ihnen folgende Wassermenge nur = c. 2 = 6,66 . 2 = 13,3 K. F. seyn. Nach der Theorie des Wasserstosses konnte also höchstens

$$p = \frac{13 - 6,6}{30} . 13,3 = 2,84 \text{ K. F.}$$

seyn, wofern der Effekt nur wie bei einem Schnurgerinne in Anschlag kommt. Weil aber das Gerinne, nach der Zeichnung, nämlich nach der Stellung des Rades, zu schliesen in seiner unteren Hälfte doch zum Theil noch als Kropf gewirkt haben muß, so wollen wir

$$p = 5 \text{ K. F. W.}$$

annehmen.

Hiernach hätten wir nun aus (CXCIV)

$$5 = \frac{0,94}{1,57} . \left(\frac{Q' + Q''}{2} + \frac{39,7 . 8,2 . 0,58}{75}\right) + \phi$$

Es ist aber in Bezug auf das Gewicht des Wasserrades $= \frac{2}{63} . \frac{1}{6} . 2500$ ℔ = 0,19 K. F. W. In Bezug auf die mit dem Vorgelege noch verbundenen Nebenhindernisse multipliciren wir noch mit $\frac{n}{n - 1}$ (CXLVI) also hier mit $\frac{8}{7}$.

So erhalten wir

$$5 = \left(\frac{0,94}{1,57} . \left(\frac{Q' + 8,2}{2} + \frac{39,7 . 8,2 . 0,58}{75}\right) + 0,19\right) . \frac{8}{7}$$

$$= (0,3\, Q' + 2,46 + 1,51 + 0,19) . \frac{8}{7}$$

$$= 0,343 . Q' + 4,75$$

also

$$Q' = \frac{5 - 4,75}{0,343} = 0,73 \text{ K. F. W.}$$

Es ist aber, wenn W den Widerstand des Holzes gegen 3 Sägen bezeichnet, $Q' = W - \mathfrak{Q} = W - 8,2$; also

$$0,73 = W - 8,2$$

und

$$W = 8,93 \text{ K. F. W.}$$

Folglich

CCX. Widerstand w des Holzes gegen eine Säge bei einem 12″ hohen Sägplock von trockenem Eichenholz für $C = 6,3'$ oder für eine Geschwindigkeit der Säge von $0,637 \cdot 6,3 = 4'$	= 2,98 oder beiläufig = 3 K. F. W.

Karsten und Belidor (Ersterer im Lehrbegriff VI. Thl. XLII. Abschn. und letzterer a. a. O.) führen eine ganz andere Berechnung, und kommen durch die Aehnlichkeit ihres Verfahrens begreiflich auf nahe zusammenfallende Resultate.

Ersterer findet $w = 375$ ℔ $= 5,36$ K. F. W.
Letzterer — $w = 358$ ℔ $= 5,13$ K. F. W.

also bedeutend größer als in CCX. Inzwischen bedarf unser zum Grunde gelegter Werth von p ($= 5$ K. F.) allerdings noch mehr Bestättigung, um ihn mit Vertrauen in der Ausübung gelten lassen zu können.

§. 109.

Zur weiteren Untersuchung mag uns folgende von Belidor selbst mitgetheilte Beobachtung dienen:

„Drei Arbeiter, wovon Einer oben steht, um nur, „wie Belidor ausdrücklich beifügt, die Säge jedes„mal wieder aufwärts zu ziehen, durchschneiden einen „12″ hohen ganz trockenen eichenen Plock in 1 Stun„de auf eine Länge von 5 Fussen (Paris.)“

In solchen Fällen ist (s. die Vorrede zu meinem Handbuche der Mechanik fester und flüssiger Körper Heidelb. 1807.) die Bougersche Formel

$$\text{CCXI.} \quad p = P \cdot \left(1 - \frac{c}{C}\right)$$

sehr brauchbar. Dabei ist P die größte Kraft, deren ein mittelmässiger Arbeiter nur bei sehr langsamer Bewegung anhaltend fähig ist; C ist die größte Geschwindigkeit mit der er bei einem Widerstande von ein Paar Pfunden anhaltend zu wirken vermag, und p die Kraft, mit der er bei irgend einer verlangten Geschwindigkeit c anhaltend zu wirken vermag. Unter dem Anhalten wird hier gefordert, daß der Arbeiter innerhalb 24 Stunden wenigstens 12 Stunden sich auf solche Weise anstrengen, und diese Anstrengung täglich, d. h. 6mal wöchentlich wiederholen kann. Beiläufig können wir nun $P = \frac{6}{7}$ Par. K. F. W. und $C = 5'$ annehmen.

Die Geschwindigkeit der Säge beim Schneiden von der Hand nimmt Karsten viel zu klein an, weil sie bei langsamem Gange keine Wirkung thut. Ich habe bei Zerschneidung förlener noch grüner Stämme mit der Handsäge innerhalb 2 Minuten 116 Schnitte gezählt, wobei die Säge sowohl im Auf- als im Niedergange gewöhnlich 26'' durchlief. Der durchlaufene Weg betrug also in 120 Sekunden 116 . 52 $= 6032''$; die Geschwindigkeit war demnach $= \frac{6032}{120} = 50{,}26'' = 4{,}2'$. Bei trockenen Eichenstämmen ist zwar die Geschwindigkeit kleiner, aber wir dürfen sie dennoch nicht unter 3,5' annehmen; die Säge schneidet dann weniger tief ein, um den sonst zu sehr ermüdenden Widerstand den Kräften anpassender zu machen. Setzen wir nun $c = 3{,}5$; so wird

$$p = \frac{6}{7} \cdot \left(1 - \frac{3,5}{5}\right) = 0,257 \text{ K. F. W. (Par.)}$$

für einen Arbeiter.

Mehr läßt sich auch bei solchen Arbeiten nicht fordern, wenn man erwägt, wie ermüdend eine solche fortgesetzte Bewegung der Aerme selbst dann ist, wann die Säge auch nicht durch Holz durchgienge.

Für die beiden untern Arbeiter hat man also

CCXII. $p = 2 \cdot 0,257 = 0,514$ K. F. W.

Bei der Mühle zu Lafere war die Geschwindigkeit der Säge $= 4'$, und in 1 Stunde wurde ein eben solcher Sägplock auf die Länge von 30′ (statt 5′) durchschnitten. Auf gleiche Länge des Zugs mußte hiernach die Mühlensäge $\frac{3,5}{4} \cdot \frac{30}{5}$ $= 5,25$mal so tief ins Holz eindringen als die Handsäge. Hiernach könnte man also beiläufig für eine Mühlensäge

$$w = 5,25 \cdot 0,514 = 2,7 \text{ K. F. W.}$$

setzen.

Dieses Resultat entspricht dem CCX so genau, als man kaum erwarten konnte.

Erwägt man noch, daß die dickeren Zacken der Mühlensägen einen größeren Widerstand leiden, als die etwas dünneren der Zimmersägen, so dürfte man den Werth von w bei Mühlensägen eher noch etwas größer in CCX erwarten, in Vergleichung mit dem bei Zimmersägen. Dagegen wird aber auch durch größere Geschwindigkeit der Widerstand des Holzes wieder vermindert. Wir können daher CCX immer als beiläufige Bestimmung beibehalten.

§. 110.

Größere Geschwindigkeit der Säge hat, wie schon einigemal bemerkt worden ist, andere Schriftsteller aber ganz unbemerkt gelassen haben, einen zu offenbaren Einfluß auf

die Verminderung des Widerstandes, als daß solche in dem Werthe von w fehlen dürfte. Bei einer Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ Fuß würde die Säge allen Effekt versagen. Man würde also eine offenbare Unrichtigkeit begehen, wenn man im allgemeinen Werthe von w gar keine Rücksicht auf die Geschwindigkeit der Säge nehmen wollte. So schwierig es nun auch ist, hierin dem Gange der Natur mit einiger Genauigkeit zu folgen, so ist es doch besser, eine gewisse Hypothese hierbei zum Grunde zu legen, als eine so nothwendige Rücksicht ganz aus dem Auge zu lassen.

Vorher bemerken wir nur noch, daß sowohl wegen der Reibung des Gatters in den Falzen als vorzüglich wegen der Reibung der Säge im Sägplock das Holz bei sehr schneller Bewegung der Säge entzündet werden kann. Belidor meldet, daß sich solches bei einer Schneidmühle im Arsenal zu Paris wirklich zugetragen habe, und räth deßhalb, diese Geschwindigkeit nie größer als 6,6 Par. Fuß zu nehmen. Ich halte mich fest überzeugt, daß bis zu dieser Geschwindigkeit der Widerstand w wenigstens um etwa $\frac{1}{6}$ kleiner, als bei der Geschwindigkeit von 4′ werden müsse. Für die Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ Fuß sehe ich den Effekt als Null an, und für die Geschwindigkeit von 4′ behalte ich w = 3 K. F. W. unter der näheren Bestimmung (CCX). Diesen 3 Forderungen entspricht die Formel

$$\text{CCXIII.} \quad w = 1 + \frac{3{,}8}{\sqrt{(u - 0{,}6)}}$$

wo u die Geschwindigkeit der Säge in Pariser Fussen bezeichnet, und die Bedingungen wie (CCX) zu verstehen sind, nur statt der dortigen Geschwindigkeit die u gesetzt.

§. 111.

Es ist nur noch übrig, den Werth von w so zu verallgemeinern, daß er nicht nur auf die verschiedenen in den Schneidmühlen vorkommenden Holzarten, sondern auch auf alle mögliche Abmessungen anwendbar werde. Wir richten daher unser Augenmerk auf die Größe der Schnittfläche, welche ständlich geschnitten wird, und bezeichnen solche in Bezug auf Quadratfusse mit s. Nach vorhandenen Beobachtungen nehmen wir nun für den gegebenen Werth von w, wenn u = 4 Par. F. ist, wie zu Lafere, folgende beiläufige Bestimmungen an:

s = { 30 Q. F. bei ganz trockenem Eichenholz
60 — — bei noch ganz grünem —
Zwischen 30 und 60 bei verschiedenen Graden der Trockenheit.

s = { 40 Q. F. bei ganz trockenem Nadelholz
80 — — bei noch ganz grünem —
Zwischen 40 und 80 bei verschiedenen Graden der Trockenheit.

Für einen 24″ hohen 15′ langen Sägplock ist der Widerstand eben so groß, als für einen 12″ hohen 30′ langen, wenn beide in einerlei Zeit durchschnitten werden. Wenn daher die ständlich verlangte Schnittfläche in Q. Fussen mit S bezeichnet wird, so erhalten wir hiermit die allgemeine Formel

$$\text{CCXIV.} \quad w = \left(1 + \frac{3{,}8}{\sqrt{(u - 0{,}6)}}\right) \cdot \frac{S}{s}$$

Hiernach können wir nun die allgemeine Formel (CXLII) leicht anwenden.

Für mehrere Sägen sey ihre Anzahl = 2N d. h. N Paare; bezieht sich nun S auf die Schnittfläche, welche für ein Paar entgegengestellter Sägen verlangt wird, so ist,

wenn W den Widerstand für sämmtliche Sägen bezeichnet, nach unserer Einrichtung mit dem Gegengewicht und entgegengestellten Sägen beiläufig

$$\text{CCXV.} \quad Q = \left(1 + \frac{3,6}{\sqrt{(u - 0,6)}}\right) \cdot \frac{2\mathfrak{N}S}{s}$$

Demnach aus (CXCIV)

$$\text{CCXVI.} \quad p = \frac{2C}{\varepsilon \pi c} \cdot \left(\left(1 + \frac{3,8}{\sqrt{(u - 0,6)}}\right) \cdot \frac{2\mathfrak{N}S}{s} + \frac{\zeta C^2 \mathfrak{Q}}{4 \varepsilon r g} \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\pi}}\right) + \phi$$

und aus (CCII) für oberschlächtige Räder:

$$\text{CCXVII.} \quad M = \frac{\frac{2C}{\varepsilon \pi} \cdot \left(\left(1 + \frac{3,8}{\sqrt{(u - 0,6)}}\right) \cdot \frac{2\mathfrak{N}S}{s} + \frac{\zeta C^2 \mathfrak{Q}}{4 \varepsilon r g} \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\pi}}\right) + \phi c}{1,6 \cdot R + \frac{1}{3} h}$$

und aus (CCIV) für unterschlächtige:

$$\text{CCXVIII.} \quad M = \frac{\frac{2C}{\varepsilon \pi} \cdot \left(\left(1 + \frac{3,8}{\sqrt{(u - 0,6)}}\right) \cdot \frac{2\mathfrak{N}S}{s} + \frac{\zeta C^2 \mathfrak{Q}}{4 \varepsilon r g} \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\pi}}\right) + \phi c}{a + \frac{1}{3} h}$$

Dabei ist $u = \frac{(0,637 \cdot C)^2}{60}$ in Par. Fussen.

oder

$$u = 0{,}0067 \cdot C^2$$

Uebrigens kommt im Werthe von $\mathfrak{Q}$ hier auch der Waagbalken über dem Gatter mit dem Gegenwicht mit in Rechnung.

Wird S gesucht, so giebt die vorstehende Gleichung

$$\frac{\varepsilon\pi}{2C} \cdot \left(\left(a + \frac{1}{3} h\right) \cdot M - \phi c \right) - \frac{\zeta C^2 \mathfrak{Q}}{4 \varepsilon r g} \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{n}} = \left(1 + \frac{3{,}8}{\sqrt{(u - 0{,}6)}} \right) \cdot \frac{2 \mathfrak{N} S}{s}$$

also

$$\text{CCXIX.} \quad S = \frac{s}{2\mathfrak{N}} \cdot \frac{\frac{\varepsilon\pi}{2C} \cdot \left(\left(a + \frac{1}{2} h\right) \cdot M - \phi c \right) - \frac{\zeta C^2 \mathfrak{Q}}{4 \varepsilon r g} \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{n}}}{1 + \frac{3{,}8}{\sqrt{(u - 0{,}6)}}}$$

Anm. Zwei neben einander eingehängte Sägen, auf die gewöhnliche Weise nach einerlei Richtung gezackt, würden bei einem 12″ dicken trockenen eichenen Sägplock und bei 4′ Geschwindigkeit einen Widerstand = 6 K. F. W. — $\mathfrak{Q}$ im Niedergange leiden; im Aufgange fände ihre Bewegung einen Widerstand = $\mathfrak{Q}$. Würde also $\mathfrak{Q}$ = 3 K. F. W. gemacht, so wäre im Aufgange wie im Niedergange der Widerstand = 3 K. F. W. d. i. eben so groß als bei zweien nach unserer Weise verkehrt gegen einander gestellten Sägen. Die Formel (CCXV) behält also, $\mathfrak{Q} = \frac{1}{2}$ W gesetzt, auch auf die gewöhnliche Einrichtung ihre Anwendung. Diese findet aber nach oben schon gemachten Bemerkungen auch dann

noch bei der gewöhnlichen Einrichtung statt, wenn auch nicht $\mathfrak{Q} = \frac{1}{2}$ W wäre, weil bei der großen Winkelgeschwindigkeit der Kurbel der Erfolg doch allemal so ist, als ob der gesammte Widerstand im Auf- und Niedergange des Gatters gleichmäßig vertheilt also $= \frac{1}{2}$ W oder für N Paar Sägen = N . w wäre, wenn w der Widerstand des Holz gegen eine Säge ist. Die von Belidor und Karsten gegebene Vorschrift, $\mathfrak{Q} = \frac{1}{2}$ W zu machen, der auf keine Weise Genüge geschehen kann, kann also nicht nur ganz bei Seite gesetzt werden, sondern es ist selbst bei der gemeinen Einrichtung darauf zu sehen, daß man $\mathfrak{Q}$ so klein mache, als es die erforderliche Festigkeit des Gatters gestattet. Bei Beobachtung dieser Regel würde ich sogar die gemeine Einrichtung immer beizubehalten rathen, so lange nicht mehr als 3 Sägen eingespannt werden sollen.

§. 112.

Die Formeln (CCXVII und CCXVIII) könnten durch ihre Gestalt zu Zweifeln Anlaß geben. Sie geben nämlich M desto größer, je größer bei einem und demselben Werthe von S die Geschwindigkeit C genommen wird. Wir müssen daher noch einige Bemerkungen beifügen. Ist Form und Anzahl der Sägen schon bestimmt, auch die ganze Einrichtung des Vorgeleges schon angeordnet, und wird nun ein bestimmter Effekt durch einen vorgeschriebenen Werth von S verlangt, so hängt es nicht mehr von uns ab, für C einen willkührlichen Werth annehmen zu wollen, wenn von gehöriger Benutzung der Maschine die Rede ist, weil diese eine angemessene Geschwindigkeit des Wasserrades voraussetzt, die selten über 5 - 6 Fusse betragen wird. Es ist also durch die

Einrichtung der Maschine der Werth von C schon mitgegeben, nämlich (CXCI) $C = \frac{Nr}{nR} \cdot c$. Durch den Busen der Säge ist die Tiefe, um welche der volle Schnitt in dem Sägplock eindringt, gleichfalls bestimmt. Beträgt dieser z. B. $1\frac{1}{2}$ Linien (wo dann nach jedem Schnitt auch der Klotzwagen um $1\frac{1}{2}$ Linien vorgerückt werden muß), so ist hiermit der zum vollen Schnitt gehörige Werth von S bestimmt, so daß dieser nicht nach Willkühr gefordert werden kann. Erhält man z. B. 9 Umläufe des Wasserrades in 1 Minute und ist $\frac{N}{n} = 7$, so erhält man in einer Minute $7 \cdot 9 = 63$ Schnitte für jede Säge, und $2\mathfrak{N} \cdot 63$ für $2\mathfrak{N}$ Sägen. Ist der Plock 1′ hoch, so erhält man hiermit in 1 Minute eine Schnittfläche $= 2\mathfrak{N} \cdot 63 \cdot \frac{1,5}{144}$ Q. F. und stündlich $2\mathfrak{N} \cdot 63 \cdot \frac{1,5}{144} \cdot 60 = 80 \cdot \mathfrak{N}$ Quadr. F. Hätte man z. B. ein Paar Sägen, also $\mathfrak{N} = 1$, so erhielte man stündlich 80 Q. F. Schnittfläche, demnach $2\mathfrak{N} \cdot S = 80$ Q. F. Würde also nur $2\mathfrak{N}S = 50$ Q. F. stündlich verlangt, so fände kein voller Schnitt zu 1,5‴ tief statt, sondern nur $\frac{5}{8}$ des vollen Schnitts, so daß jeder Schnitt nur $\frac{5}{8} \cdot 1,5'' = 0,94'''$ tief in das Holz eindringen, also auch der Klotzwagen nach jedem Schnitt nur um 0,94‴ vorgerückt werden dürfe.

Würde dagegen $2\mathfrak{N} \cdot S = 120$ Q. F. verlangt, so müßte man, weil sich der volle Schnitt nicht vergrößern läßt, $\mathfrak{N}$ vergrößern, nämlich $\mathfrak{N} = 1,5$ nehmen, und C bliebe immer unverändert. Würde $2\mathfrak{N} \cdot S = 140$ Q. F. verlangt, so müßte $\mathfrak{N} = \frac{140}{80} = 1,75$ also $2 \cdot 1,75 =$

3,5 Säge eingehängt werden. Jetzt müßte man also 4 Sägen einspannen, dagegen aber nur $\frac{3,5}{4}$ oder $\frac{7}{8}$ vom vollen Schnitt gestatten, so daß die Säge mit jedem Schnitt nur $\frac{7}{8} \cdot 1,5$ oder $1,31'''$ tief ins Holz eindränge.

§. 113.

Zur Einrichtung im Ganzen dienen noch folgende allgemeine Bestimmungen.

Die Länge des ganzen Zugs oder des Gatterhubes ist allemal $= 2r$; beträgt also der jedesmalige Schub des Wagens $\frac{1}{m}$ des Zugs, so ist die Größe des jedesmaligen Wagenschubes $= \frac{2r}{m}$. Ist ferner die Höhe des Sägplocks $= \delta$, so giebt jeder einzelne Zug oder Hub eine Schnittfläche $= \frac{2\delta r}{m}$ Q. Fuß, und wenn $2\mathfrak{N}$ Sägen zugleich arbeiten, so werden zu einer Schnittfläche Σ stündlich $\frac{\Sigma}{\left(\frac{2\delta r}{m}\right)} = \frac{m\Sigma}{2\delta r}$ Schnitte von sämmtlichen Sägen zusammengenommen erfordert, also $\frac{m\Sigma}{4\mathfrak{N}\delta r}$ Umläufe der Kurbel. Die Warze macht aber stündlich $\frac{3600}{\left(\frac{6,28 \cdot r}{C}\right)}$ oder $\frac{3600 \cdot C}{6,28 \cdot r}$ Umläufe; man hat also

CCXX. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{3600 \, . \, C}{6,28} = \frac{m \Sigma}{4 \mathfrak{N} \delta} \\ \text{oder } \frac{3600 \, . \, C}{1,57} = \frac{m \Sigma}{\mathfrak{N} \delta} \end{array} \right.$

wo $\mathfrak{N}$ die Paare von Sägen bezeichnet, also für eine Säge $\mathfrak{N} = \frac{1}{2}$ wird.

Man hat hiernach

CCXXI. $\left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \frac{3600 \, . \, \mathfrak{N} \, . \, \delta C}{1,57 \, . \, m} \\ C = \frac{1,57 \, . \, m \, . \, \Sigma}{3600 \, . \, \mathfrak{N} \, . \, \delta} \end{array} \right\}$ Dabei ist $\Sigma = 2 \mathfrak{N} \, . \, S$

§. 114.

Wie bei Erbauung einer jeden Maschine, so muß man sich auch bei Erbauung einer Schneidmühle einer bestimmten Wassermenge M für jede Sekunde versichert halten können, und hierauf muß der ganze Bau gegründet werden. Man stelle nunmehr die Berechnung für die Voraussetzung C = 8′ (Par.) an, und nehme s für trockenes Eichenholz; δ setze man dabei = 1′.

Nunmehr setze man m = 250, und berechne hiernach zuerst $2 \mathfrak{N} \, . \, S$ oder Σ aus (CCXIX), indem man dort mit $2 \mathfrak{N}$ multiplicirt. Dann berechne man $\mathfrak{N}$ aus (CCXXI).

Den Werth von r nehme man nicht < 1′ aber auch nicht > $\frac{5}{4}$′ (Par.). Man mache die Einrichtung ferner so, daß 2 Zacken des Sperrades fortgestossen werden müssen, um in 1 Stunde den Klotzwagen 30′ weit vorwärts gegen die Säge zu schieben.

Stündlich werden $\frac{3600 \, . \, C}{6,28 \, . \, r} \, . \, 2 = \frac{1800 \, . \, C}{1,57 \, . \, r}$ Zacken

fortgestossen; hat also das Sperrad Z Zacken, so macht es stündlich $\frac{1800 . C}{1,57 . r . Z}$ Umdrehungen.

Der Durchmesser der an der Sperradswelle liegenden Trillinge sey $= d$, also ihr mechanischer Umfang $= 3,14 . d$, so ist der Weg, welchen der Klotzwagen stündlich durchlauft, $= \frac{1800 . C}{1,57 . r . Z} . 3,14 . d = \frac{3600 . C . d}{r . Z}$.

Man kann nunmehr eine angemessene Länge des stündlichen Schnitts bei einem 1′ hohen trockenen eichenen Sägplock vorschreiben; bezeichnen wir solche in Par. Fussen mit λ, so hat man

$$\text{CCXXII.} \quad \lambda = \frac{3600 . C . d}{r . Z}$$

Richtet man nun die Maschine so ein, daß sie den gedachten Sägplock in 1 Stunde auf die Länge von 30′ durchschneidet, wofern jedesmal 2 Zacken abgestossen werden, so hat man

$$30 = \frac{3600 . C . d}{Z . r}$$

und nunmehr

$$\text{CCXXIII.} \quad Z = \frac{120 . C . d}{r} \quad (\text{s. CCXXIV}).$$

§. 115.

Zu Lafere war nach (§. 107) $d = \frac{5'}{6}$, $r = \frac{5'}{4}$, $C = 6,3'$. Dieses gäbe

$$Z = \frac{120 . 6,3 . \frac{5}{6}}{\frac{5}{4}} = 504$$

Wirklich war aber (§. 107) $Z = 384$, und es hätten mit jedem Stoße nur $1\frac{1}{2}$ Zacken abgestoßen werden dürfen, um

in 4 Minuten den Wagen um 2′ weit fortzurücken. Er hätte bei einer ganzen Umdrehung des Sperrades nach den angegebenen Abmessungen wirklich um 2 Fusse vorwärts rücken müssen, hätte aber hierzu nicht 4 sondern nur 3 Minuten nöthig gehabt, und der Schnitt wäre stündlich nicht = 15 . 2 sondern = 20 . 2 = 40′ lang geworden. Da nun die Länge des Schnitts wirklich nur 30′ betrug, so folgt hieraus, daß der Weg eines Triebstocks an den in den Zahnbaum eingreifenden Trillingen um $\frac{1}{3}$ größer seyn mußte, als der Weg eines Zahns am Klotzwagen. Diese Erscheinung liesse sich daraus erklären, daß der Sägplock mit Gewalt an die 3 Sägen angedruckt werden mußte, und daß darum derselbe, so oft ein Zahn am Zahnbaum vom andruckenden Triebstock verlassen wurde, wieder um $\frac{1}{4}$ seiner Vorrückung zurück gewichen sey. Auch konnte ein angreifender Trilling wohl beim Fortrücken einiger Zacken des Sperrades nur in eine gewisse Spannung gebracht werden, ohne jedesmal wirklich Fortrücken des Wagens zu bewirken, und nach dem Abfalle eines Triebstocks vom Zahne konnte der Triebstock oder der Trilling um ein weniges vorwärts rücken.

Dieses Resultat der Erfahrung könnte darauf leiten, dem Sperrade etwa nur $\frac{3}{4}$ soviel Zacken zu geben, als nach (CCXXIII) nöthig wäre. Da aber das Gewicht des Wagens mit dem aufliegenden Sägplock hierbei vorzüglich in Betrachtung kommt, dann aber auch die Anzahl der eingespannten Sägen einigen Einfluß auf jene Spannung hat, so läßt sich die Verminderung des Werths von Z nicht so geradehin durch die Multiplikation mit $\frac{3}{4}$ bewirken. Für die meisten Schneidmühlen würde diese Verminderung zu stark seyn. Wir setzen daher für die Ausübung

$$\text{CCXXIV.}\quad Z = \frac{110 \,.\, C \,.\, d}{r}$$

und überlassen es nun dem Aufseher der Mühle bei ihrer jedesmaligen Betreibung den erforderlichen Schub des Wagens durch Regulirung der Stoßstange zu bewirken.

Die hiernach eingerichtete Mühle leistet nun für alle Fälle der Ausübung ihre guten Dienste, wenn ihr Besitzer dreierlei Sägen im Vorrathe hält 1) mit 1''' Busen, 2) mit $1\frac{1}{2}'''$ Busen, 3) mit 2''' Busen auf die Länge des ganzen Zugs.

§. 116.

Bei einem bestimmten Werthe von S bleibt der Effekt der Mühle ungeändert, wenn N und C sich so ändern, daß N . C unverändert bleibt. Es sey nun $\frac{4N \,.\, C \,.\, S}{\varepsilon \pi g} \,.\, 3,8 = A$;

$\frac{\zeta \Omega \sqrt{\frac{\Omega}{n}}}{2 \varepsilon^2 \pi r g} = B$, so hat man (CCXVIII), um den Werth von C zu finden, für welchen M ein Minimum wird,

$$\frac{A}{\sqrt{(u - 0,6)}} + B \,.\, C^3 = \text{Min.}$$

Daher

$$(0,319 \,.\, A)^2 = (0,637 \,.\, C - 0,6)^3 \,.\, 9\, B^2\, C^4 \quad (E)$$

und noch beiläufig

$$(0,319 \,.\, A)^2 = 0,57^3 \,.\, C^3 \,.\, 9 \,.\, B^2\, C^4$$
$$= 1,66 \,.\, B^2 \,.\, C^7$$

und

$$\text{CCXXV.}\quad \log. C = \frac{l.\,(0,319 \,.\, A)^2 - l.\,(1,66 \,.\, B^2)}{7}$$

woraus sich C beiläufig giebt. Weil nur aus (E) genauer

CCXXVI. $C = \sqrt[4]{\frac{(0,319 . A)^2}{9 B^2 . (0,637 . C - 0,6)^3}}$

so erhält man den Werth von C hinlänglich genau, wenn man zur Rechten in (CCXXVI) statt C den nach CCXXV berechneten Werth von C substituirt.

§. 117.

Wir wollen hier zum Beschlusse für die Erbauung der Schneidmühlen einige praktische Regeln zusammenstellen.

1) Man überlasse die Geschwindigkeit des Wasserrades nicht dem Ohngefähr, sondern bringe solche der größten Wirkung des Wassers so nahe als es die Umstände gestatten.

2) Man nehme vorzüglich auf Schnelligkeit der Säge Bedacht, so daß ihre Geschwindigkeit nie unter 4 Par. F. falle. Man wähle nöthigenfalls lieber einen schwächeren Busen.

3) Die Schnelligkeit der Säge muß nicht durch Schnelligkeit des Wasserrades bewirkt oder durch solche unterstützt, sondern bei dem vortheilhaftesten Gange des Wasserrades (No. 1.), der von der Geschwindigkeit der Last ganz unabhängig ist, blos durch die Einrichtung des Vorgeleges bewirkt werden.

4) Das unterschlächtige Rad muß man sehr nahe an die Fallschütze bringen; die Gränze der Annäherung ist oben bestimmt worden.

5) Man muß überall wo möglich statt des Schnurgerinnes ein Kropfgerinne anbringen, auch

6) nie, wo ein Kropfrad angelegt werden kann, ein Straubrad bauen, sondern ein Staberrad, und zwar

7) ein Staberrad mit schiefgestellten Schaufeln, die auf dem äußeren Umfange, der ringsum mit Brettern (wie bei oberschlächtigen Rädern der innere) beschlagen ist, aufsitzen.

8) Man muß kein so lästiges Gatter bauen, wie Belidor gethan hat; vielmehr muß

9) dasselbe so leicht gebaut werden, als es die Festigkeit gestattet.

10) Einem Gatter mit 4 oder mehr Sägen bringe man auf gehörige Weise ein Gegengewicht an, und gebe der einen Hälfte von Sägen die entgegengesetzte Stellung.

11) Man lege nie, wie Belidor bei der Mühle zu Lafere gethan hat, die Axe des Rades beinahe bis zur Fläche der Fallschützenschwelle herab, sondern nehme den Halbmesser des Wasserrades so groß, daß die Höhe ed (Fig. 5.) wenigstens 1′ höher wird, als die Höhe des lebendigen Gefälles ist.

12) Man nehme nicht, wie Belidor zu Lafere gethan hat, bei 13′ Gefälle 7′ zum todten Falle oder zum Wasserstande vor der Fallschütze, sondern nehme den Wasserstand in allen Fällen so niedrig, als es die Umstände gestatten, um das größtmögliche lebendige Gefälle und hiermit die größtmögliche Druckhöhe zu erhalten.

Achtes Kapitel.

Theorie derjenigen ungleichförmigen Maschinen, bei welchen von Periode zu Periode neue Massen aus der Ruhe in Bewegung gesetzt werden, so daß plötzliche Geschwindigkeitsänderungen erfolgen. Stampf- und Hammerwerke.

§. 118.

Bei allen Arten von Stampfwerken (in den Oehlmühlen, Pulvermühlen, Papiermühlen, Gypsmühlen, Walkmühlen, Eisenhammerwerken rc.) trit ungleichförmiger Beharrungsstand der Maschine darum ein, weil in dem Augenblick, da ein Stampfer (oder Hammer) abfällt und dagegen zu gleicher Zeit ein neuer von gleichem Gewicht ergriffen wird, die Geschwindigkeit der in Bewegung bleibenden Massen in eine größere Summe von Atomen vertheilt und nach dem Maaße dieser Vertheilung nothwendig vermindert wird. Wenn eine Masse M sich mit einer Geschwindigkeit C nach einer bestimmten Richtung bewegt, und in dieser Bahn eine ruhig liegende Masse m antrift, so bewegt sich bekanntlich nach diesem Stosse (Wirkungen der Elasticität bei Seite gesetzt) die Masse M + m mit einer gemeinschaftlichen geringeren

Geschwindigkeit c nach derselben Richtung fort, so daß die sämtlichen Atomen mit unveränderter ursprünglicher Bewegungskraft, welche durch C . M ausgedruckt wird, die Bewegung fortsetzen, daß also c . (M + m) als neue Bewegungskraft der C . M gleich bleiben muß. Daher

$$c = \frac{M}{M + m} . C.$$

Auf der richtigen Anwendung dieses Satzes beruht die nachstehende Theorie solcher Maschinen.

§. 119.

An einer Maschine seyen die statischen Momente der bewegenden Kraft und der Last unveränderlich; sämtliche mit dem Gange der Maschine zugleich in Bewegung gesetzte Massen denke man sich nach der Lehre von den Trägheitsmomenten auf den von der Last angegriffenen Punkt reducirt.

Die reducirte Größe der in dem Augenblick, da eine in Ruhe befindliche Masse ergriffen und von neuem in Bewegung gesetzt wird, in Bewegung befindlichen Massen . . . . = n

Die Zeit, nach deren Verlauf jedesmal eine neue Masse ergriffen und in Bewegung gesetzt wird, in Sekunden . . . . = t

Die Masse, welche jedesmal nach t Sekunden ergriffen und aus der Ruhe in Bewegung gesetzt wird, auf den Lastpunkt reducirt . . . . . . = Q

Wären nicht alle während einem Umlaufe des Wasserrades ergriffene einzelne Massen gleich groß, so nimmt man das arithmetische Mittel ihrer reducirten Werthe für Q.

Der Weg, welchen der Lastpunkt nach der Richtung des damit verbundenen Widerstandes durchläuft (in der Zeit t) . . . . = h

Der vom Kraftpunkt in derselben Zeit durchlaufene Raum . . . . $= B$

Die nach der Hebellehre auf den gemeinschaftlichen Lastpunkt reducirte Last . . . . $= Q$

Die am Kraftpunkt erforderliche Kraft, vermöge deren Ueberwucht der von der Last angegriffene Punkt in der Zeit t jedesmal den Weg b zu durchlaufen vermag . . . . $= P$

Die veränderliche Geschwindigkeit des Kraftpunktes, die jedesmal am Ende der Beschleunigungszeit t ein Maximum ist, sey am Ende der Zeit t $= C$

Man soll eine allgemeine Gleichung zwischen allen diesen Bestimmungsstücken für den Beharrungsstand finden.

Aufl. 1. Von dem Augenblick des erfolgten neuen Angriffs, da die Masse Q ergriffen worden ist, indeß die n in Bewegung geblieben war, muß Beschleunigung der Bewegung eintreten, um die verminderte Geschwindigkeit während der folgenden Zeit t wieder herzustellen, und dadurch einen Beharrungsstand möglich zu machen.

2. Die Kraft P auf den Lastpunkt reducirt ist $\frac{B}{b} \cdot P$, also die Ueberwucht oder die in die Masse wirkende bewegende Kraft $= \frac{B}{b} \cdot P - Q$.

Da nun gleich nach der ergriffenen neuen Masse Q die Ueberwucht ganz so in die gesammte Masse wirkt, als wäre die Masse $n + Q$ am Lastpunkt angebracht, so erhält man die während der Zeit t wirkende beschleunigende Kraft

$$f = \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{n + Q}$$

3. Der Lastpunkt durchläuft vermöge der Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{C}$, die jedesmal am Anfange von t eintrit, während der Zeit t den Weg $t \cdot \frac{b}{B} \cdot \mathfrak{C}$.

Hierzu kommt noch vermöge der beschleunigenden Kraft f

$$\text{der Weg } t^2 f g = t^2 \cdot \frac{\frac{B}{b} P - Q}{\Pi + \Omega} \cdot g.$$

Beide Wege zusammen bestimmen den ganzen Raum b, welchen der Lastpunkt in der Zeit t durchlauft; man hat also

$$b = t \cdot \frac{b}{B} \cdot \mathfrak{C} + t^2 \cdot \frac{\frac{B}{b} P - Q}{\Pi + \Omega} \cdot g$$

4. Der Werth von $\mathfrak{C}$ läßt sich durch c und die Massen bestimmen.

Da nämlich die Bewegung aller Massen ganz so erfolgt, als wäre ihre reducirte Summe physisch am Lastpunkte angebracht, so muß die Geschwindigkeit c beim Angriffe einer neuen Masse Ω, wo diese Geschwindigkeit der reducirten Masse Π zukommt, unter die $\Pi + \Omega$ vertheilt werden, so daß eine neue Geschwindigkeit $\mathfrak{C} = \frac{\Pi}{\Pi + \Omega} \cdot c$ entsteht.

Diese in der letzten Gleichung substituirt, giebt

$$b = t \cdot \frac{b}{B} \cdot \frac{\Pi}{\Pi + \Omega} \cdot c + t^2 \cdot \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi + \Omega} \cdot g$$

und

$$c = \frac{(\Pi + \Omega) \cdot b - t^2 g \cdot \left(\frac{B}{b} \cdot P - Q\right)}{t \Pi} \cdot \frac{B}{b}$$

5. In der vorstehenden Gleichung sind noch zwei unbestimmte Größen enthalten, c und t. Wir suchen daher noch eine Gleichung für c.

Diese ergiebt sich aus der Forderung, daß die Geschwindigkeit $\frac{b}{B} . C$, welche dem Lastpunkte am Anfange der Zeit t zukommt, jedesmal am Ende derselben $= \frac{b}{B} . c$, oder daß aus der C die c geworden seyn müsse.

Nun kommt aber zu der Anfangsgeschwindigkeit $\frac{b}{B} . C$ in der Zeit t noch die Geschwindigkeit $2t . fg$; man hat also am Ende der Zeit t

$$\frac{b}{B} . c = \frac{b}{B} . C + 2t . fg$$

$$= \frac{b}{B} . \frac{\Pi}{\Pi + \Omega} . c + 2t . \frac{\frac{B}{b} P - Q}{\Pi + \Omega} . g$$

Daher

$$c = \frac{\Pi + \Omega}{\Omega} . \frac{B}{b} . \frac{\frac{B}{b} P - Q}{\Pi + \Omega} . 2tg$$

oder

$$c = \frac{B}{b} . \frac{\frac{B}{b} . P - Q}{\Omega} . 2tg$$

6. Die beiden Werthe von c (No. 4 und 5) geben

$$\frac{\frac{B}{b} P - Q}{\Omega} . 2tg = \frac{(\Pi + \Omega) . b}{t\Pi} - tg . \frac{\left(\frac{B}{b} P - Q\right)}{\Pi}$$

also durchaus mit $t \Pi \Omega$ multiplicirt,

$$\left(\frac{B}{b}P - Q\right).2t^2 g\pi = (\pi + \Omega).\Omega.b - t^2 g\Omega.\left(\frac{B}{b}P - Q\right)$$

oder

$$\text{CCXXVII. } b.\Omega.(\pi+\Omega) = (2\pi+\Omega).\frac{B}{b}.(P-Q).t^2 g$$

welches die gesuchte Fundamentalformel ist.

§. 120.

Die vorstehende allgemeine Formel beantwortet alle hieher gehörige Fragen. Sie giebt

$$\left.\begin{array}{l}\text{CCXXVIII. } P = \frac{b}{B}.\left(Q + \frac{(\pi+\Omega).\Omega.b}{t^2 g.(2\pi+\Omega)}\right)\\ \text{CCXXIX. } Q = \frac{B}{b}.\left(P - \frac{(\pi+\Omega).\Omega.b}{t^2 g.(2\pi+\Omega)}\right)\end{array}\right\}$$ s. auch unten §. 131.

Für einen gleichförmigen Beharrungsstand hätte man schlechthin

$$P = \frac{b}{B}.Q$$

also ist

$$\text{CCXXX. } \left\{\begin{array}{c}\text{Die erforderliche}\\ \text{Ueberwucht}\end{array}\right\} = \frac{b}{B}.\frac{(\pi+\Omega).\Omega.b}{t^2 g.(2\pi+\Omega)}$$

Diese wird desto kleiner, je größer π in Vergleichung mit Ω genommen wird. Ist $\frac{\Omega}{\pi}$ sehr klein, so wird sehr nahe

$$\text{CCXXXI. } P = \frac{b}{B}.\left(Q + \frac{b\Omega}{2t^2 g}\right)$$

Wäre hingegen $\frac{\pi}{\Omega}$ sehr klein, so wäre sehr nahe

$$\text{CCXXXII. } P = \frac{b}{B}.\left(Q + \frac{b\Omega}{t^2 g}\right)$$

Die Ueberwucht wäre also im Falle CCXXXII doppelt so groß als im Falle CCXXXI. Da aber weder $\frac{\mathfrak{Q}}{\pi}$ noch $\frac{\pi}{\mathfrak{Q}}$ jemals wirklich $= 0$ werden kann, so fällt der Werth von P nothwendig allemal

$$\text{zwischen } \frac{b}{B} \cdot \left(Q + \frac{b\,\mathfrak{Q}}{2t^2 g}\right) \text{ und } \frac{b}{B} \cdot \left(Q + \frac{b\,\mathfrak{Q}}{t^2 g}\right)$$

Daher kann die erforderliche Ueberwucht durch die Verkleinerung von $\frac{\mathfrak{Q}}{\pi}$ nie bis zur Hälfte vermindert werden, um so weniger, da mit der Vergrösserung von π auch die Reibung an den Wellzapfen des Wasserrades vergrössert wird.

§. 121.

Die Gleichung CCXXVIII mit der CXLII verbunden giebt mit Rücksicht auf (§. 76.) die Anwendung auf Wasserräder. Nämlich

Für oberschlächtige Räder:

$$(1{,}6.\,R + \tfrac{1}{3}\,h).\,\frac{M}{c} = \frac{b}{B} \cdot \left(Q + \frac{(\pi + \mathfrak{Q}).\,\mathfrak{Q}.\,b}{t^2 g.\,(2\pi + \mathfrak{Q})}\right)$$

also

$$\text{CCXXXIII. } M = \frac{b\,c}{B.\,(1{,}6.\,R + \frac{1}{3}h)} \cdot \left(Q + \frac{(\pi + \mathfrak{Q}).\,\mathfrak{Q}.\,b}{t^2 g.\,(2\pi + \mathfrak{Q})}\right)$$

Für unterschlächtige Kropfräder:

$$\text{CCXXXIV. } M = \frac{b\,c}{B.\,(a + \frac{1}{3}h)} \cdot \left(Q + \frac{(\pi + \mathfrak{Q}).\,\mathfrak{Q}.\,b}{t^2 g\,(2\pi + \mathfrak{Q})}\right)$$

§. 122.

Ex. Eine 3 hübige Daumenwelle soll 10 Stampfer betreiben, so daß immerhin 4 von ihnen in Bewegung seyen.

Die Welle soll 24 Umläufe in 1 Minute machen, also jeder Stampfer 72mal in 1 Minute erhoben werden. Die Erhebung soll, im Durchschnitt genommen, 16″ betragen, und jeder Stampfer 60 Berl. ℔ wiegen.

Die Betreibung soll durch ein oberschlächtiges Rad geschehen, für welches $R = 8'$, $h = 1\frac{1}{2}'$ wäre.

Wie muß das Vorgelege eingerichtet seyn, und wie viel Aufschlagwasser wird in jeder Sekunde erfordert?

Die Welle erhält 10 . 3 oder 30 Theilungslinien, in welchen die erforderlichen 30 Daumen um $\frac{360}{30} = 12°$ von einander abstehen. Der Erhebungswinkel ist also 4 . 12 $= 48°$. Da gekrümmte Hebedaumen vorausgesetzt werden, und Bog. $48° = 0{,}8377$ ist, so hat man, wenn r den mechanischen Halbmesser der Daumenwelle bezeichnet,

$$r \cdot 0{,}8377 = 16'' = 1{,}333'$$

also

$$r = \frac{1{,}333}{0{,}838} = 1{,}59'.$$

Für die Geschwindigkeit des Wasserrades setzen wir $c = 6'$. Hiernach braucht es zu einem Umgange $\frac{6{,}28 \cdot 8}{6} = 8{,}34$ Sekunden, und macht in 1 Minute $\frac{60}{8{,}34}$ Umläufe $= 7{,}2$.

Es soll aber die Daumenwelle 24 Umläufe in einer Minute machen; hat also das Stirnrad an der Wasserwelle N Kämme und der Kumpf an der Daumenwelle n Stöcke, so hat man $N = \frac{24}{7{,}2} \cdot n$.

Geben wir dem Halbmesser der physischen Daumenwelle 13″, so wird ihr Umfang $= 6{,}28 \cdot 13 = 81{,}64'' = 6{,}8$.

Ziehen wir wegen der einzulegenden Triebstöcke 0,2′ ab, so bleibt

Mechanischer Umfang des Kumpfs $= 6{,}6'$

Nehmen wir 16 Triebstöcke, so wird die Schrift $= \frac{6{,}6}{16}$ $= 0{,}412' = 4{,}94''$. Also

Dicke eines Triebstocks $= 2{,}47''$

und wir nehmen

Dicke eines Kamms $= 2''$

Zwischenraum zwischen 2 Kämmen $= 2{,}94''$

Anzahl der Kämme $= \frac{24}{7{,}2} \cdot 16 = 53{,}3$

wofür wir zur bequemeren Eintheilung 52 nehmen.

Die Daumenwelle macht hiernach bei der angenommenen Geschwindigkeit des Rades $\frac{52 \cdot 7{,}2}{16} = 23{,}4$ Umgänge in 1 Minute, welches genau genug die vorgeschriebene Zahl ist.

Anm. Wir setzen die Berechnungen so fort, als hätte das Rad wirklich die Geschwindigkeit von 6′, und als machte die Daumenwelle in 1 Minute 24 Umdrehungen. Indem nämlich nur 23,4 Umgänge erfolgen, wird das statische Moment der Last auch nur $\frac{23{,}4}{24}$ von dem, welches wir in der Aufgabe für die Geschwindigkeit des Rades von 6′ haben. Das Rad wird also wegen dieses verminderten statischen Momente der Last auch beiläufig $\frac{24}{23{,}4}$ mal so schnell herum laufen, indem bei so geringen Aenderungen der Last, das mechanische Moment der Kraft beinahe ungeändert bleibt. Es werden also bei der etwas größeren Geschwindigkeit des Rades dennoch die 24 Um-

läufe der Daumenwelle in 1 Minute so genau erfolgen, als ob das Vorgelege diejenige Einrichtung hätte, bei welcher zu 6′ Geschwindigkeiten des Wasserrades 24 Umläufe der Daumenwelle gehörten. Beide Einrichtungen können daher als völlig gleichgeltend angesehen werden.

In 1 Minute macht also die Daumenwelle 24 Umgänge. Ihr mechanischer Umfang ist 1,59′. 6,28 = 9,98′; also die Geschwindigkeit dieses Umfangs $= \frac{24 \cdot 9,98}{60} = 3,99'$ wofür wir 4′ setzen.

Es ist also auch die Geschwindigkeit eines aufsteigenden Stampfers = 4′. Demnach b : B = 4 : 6.

Die Masse des Wasserrades mit Welle und Stirnrad auf den mechanischen Umfang des ersteren gebracht, sey = 50 K. F. W. Zur Abkürzung übergehe ich ihre an sich leichte Berechnung.

Die Daumenwelle sey 24′ lang, so kann man sie = 100 K. F. W. setzen, also auf ihren wirklichen Umfang reducirt = 50 K. F. W. und nun auf ihren mechanischen Umfang gebracht $= \left(\frac{1\frac{1}{12}}{1,59}\right)^2 \cdot 50 = 23$ K. F. W.

Die Masse des Wasserrades (die obigen 50 K. F.) eben dahin reducirt, ist

$$\frac{B^2}{b^2} \cdot 50 = \frac{9}{4} \cdot 50 = 112 \text{ K. F. W.}$$

also für Wasserrad und Daumenwelle

$$n = 23 + 112 = 135 \text{ K. F. W.}$$

Weil nun noch die Masse von 4 Stampfern hinzukommt, ingleichem die Masse der Hebeköpfe und die des Aufschlagewassers in den Zellen, so könnten wir mit der Sicherheit, das geringste genommen zu haben,

$$\Pi = 145 \text{ K. F. W.}$$

setzen. Man weiß schon, daß der Werth von Π keiner se.r genauen Bestimmung bedarf.

Jetzt ist noch t zu bestimmen. Jeder Hebekopf durchlauft, bevor er abfällt und ein neuer Stampfer ergriffen wird, $48° = \frac{2}{15}$ der Peripherie.

Zu einem ganzen Umlaufe der Daumenwelle gehören $\frac{60}{24} = 2,5$ Sekunden also

$$t = \frac{2}{15} \cdot 2,5 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \text{ Sekunde.}$$

Die Last Q giebt sich, die Reibung bei Seite gesetzt, aus dem Gewicht der beständig entgegendruckenden 4 Stampfer; ihr Gewicht ist $4 \cdot 60$ ℔ $= 4 \cdot \frac{10}{11} = 3,64$ K. F. W.

Die Reibung an den Wellzapfen des Wasserrades ist am Umfang des Wasserrades beiläufig $= \frac{1}{3}$ K. F. W. also am Lastpunkt $= \frac{B}{b} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ K. F. W.

Die Zapfenreibung der Daumenwelle setzen wir, auf den Lastpunkt reducirt, $= 2$ K. F. Wasser.

Also bis hierhin die Last $= 3,64 + 0,50 + 2 = 6,14$ K. F. W. Multipliciren wir noch wegen der 16 Triebstöcke mit $\frac{16}{15}$, so erhalten wir 6,55 K. F. W.

Wegen der nur geringen Reibung an den Hebeköpfen und an den Scheidelatten setzen wir zum Ueberfluß

$$Q = 6,8 \text{ K. F. W.}$$

Setzen wir nun $\mathfrak{Q} = \frac{10}{11}$ K. F. W. so erhalten wir aus (CCXXXIII), weil $\frac{b}{B} = \frac{2}{3}$ ist, in rhl. Maaß

$$M = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot (1{,}6 \cdot 8 + 0{,}5)} \cdot \left(6{,}8 + \frac{(145 + \frac{10}{11}) \cdot \frac{10}{11} \cdot 1\frac{1}{3}}{\frac{1}{9} \cdot 15{,}6 \cdot (290 + \frac{10}{11})}\right)$$

$$= 0{,}3 \cdot (6{,}8 + 0{,}34) = 2{,}14 \text{ K. F. W.}$$

Zur Vergleichung mit dem größtmöglichen Totaleffekt dient noch folgendes.

Der Nutzeffekt besteht darin, daß $720 \cdot \frac{10}{11}$ K. F. W. in 1 Minute auf die Höhe von $1\frac{1}{3}$ rhl. Fuß erhoben werden. Das Produkt $720 \cdot \frac{10}{11} \cdot 1\frac{1}{3}$ ist 873.

Da wir die ganze Fallhöhe des Aufschlagwassers bis zur Mitte der untersten Zelle zu $17\frac{1}{2}$ Fuß hoch genommen haben, so ist der größtmögliche Totaleffekt, gleichfalls für 1 Minute genommen, $= 60 \cdot 2{,}06 \cdot 17{,}5 = 2163$. Also der Nutzeffekt beiläufig nur $\frac{2}{5}$ von Totaleffekt.

Man muß aber auch erwägen, daß die Nutzlast nur $= 3{,}64$ K. F. W. ist; hingegen die gesammte Last Q $= 6{,}8$ K. F. W. Hiernach kann also schon der größtmögliche Nutzeffekt nicht über $\frac{3{,}64}{6{,}80} \cdot 2163$ oder 1158 ausfallen.

Nehmen wir nun noch hinzu, daß wegen der Art, wie das Wasser beim oberschlächtigen Rad wirkt, auch noch etwa $\frac{1}{4}$ verlohren geht, so daß nur etwa noch $\frac{13{,}3}{17{,}5} \cdot 1158 = 880$ übrig bleiben, so stimmt solches mit obiger Zahl 873 hinlänglich genau zusammen.

Anwendung auf Hammerwerke.

§. 123.

Der Nachtheil von dem Umstande, daß nach einer bestimmten Periode jedesmal eine bestimmte Masse Q von neuen in Bewegung gesetzt werden muß, zeigt sich vorzüg-

lich bei Hammerwerken, weil bei solchen, besonders bei großen Eisenhammerwerken Q viel größer ausfällt als bei den eigentlichen Stampfwerken, indem wir nur erwägen dürfen, daß zu der Last Q noch die erforderliche Ueberwucht $\frac{(n + Q) \cdot Q \cdot b}{t^2 g (2n + Q)}$ hinzukommen muß, wo Q auf den Angriffspunkt reducirt ziemlich bedeutend werden kann.

§. 124.

Bei den Stampfern ist die Krümmung des Hebekopfs eine von dem Kreise abgewundene Linie; bei den Hämmern hingegen muß sie ganz dieselbe seyn, wie bei den Kämmen verzahnter Räder, nämlich

Eine Cycloide bei den Aufwerfhämmern
— Epicycloide bei den Schwanzhämmern

Bei ersteren ist der Hub gewöhnlich 2 Fuß, bei letzteren 1 Fuß (s. §. 134 *).

§. 125.

Der Aufwerfhammer (Fig. 7.) wird von der Seite bei m angegriffen, so daß die Daumenwelle dem Hammerhelm bc parallel liegt. Beim Schwanzhammer (Fig. 8.) liegt der Angriffspunkt m am Anfange des Helms.

Der Aufwerfhammer ist also ein einseitiger, der Schwanzhammer ein zweiseitiger Hebel.

Man kann sich folgende zusammenpassende Bestimmungen merken, wie ich sie von wirklichen Anlagen hergenommen habe.

Fig. 7. Länge bc = 7′
Stärke . . . . 10″
Breite . . . . 7″

	Entfernung am	1′ 10″
	— — bm	4′ 1½″
	— — ab	6′
	Hammergewicht	300 ℔
	Gewicht des Helms sammt Beschläge	175 ℔
Fig. 8.	Länge mc	13′ — 4″
	Dicke und Breite . . .	— 10″
	Entfernung ab . . .	8′ — 4″
	— — mb . . .	4′ — 2″
	Hammergewicht	150 ℔
	Gewicht des Helmstücks bc	206 ℔
	—— des Stücks bm .	100 —
	—— des Schwanzrings bei m	32 —
	Halbmesser der physischen Welle	1′ — 5″
	Halbmesser der Wellzapfen .	— $2\frac{1}{2}$″

Die Maasse können für rhl.
Die Gewichte für Cölln. oder Berliner gelten.

§. 126.

Wir halten uns hier nur an die Schwanzhämmer em (Fig. 8.) ist der mechanische Halbmesser der Daumenwelle; dm. ein Stück von der Bahn des Hebekopfs d. h. von der mit em beschriebenen Kreislinie. Soll der Hammer d. h. sein Schwerpunkt 1′ hoch erhoben werden, so muß, wenn der Hebekopf den Helm in v verläßt, das Perpendikel vw $= \frac{1}{2}$′ seyn; also *)

*) Ist α der in der horizontalen mp lothrecht über b liegende Punkt, so kann hier allemal vαw = vbw gesetzt werden.

$$\text{Sin. } vbw = \frac{vw}{bv} = \frac{0,5}{4,16} = 0,1202$$

Daher $vbw = 6^\circ\ 54'$ und Bog. $mv = 0,1204$. $bm = 0,5008 = 0,5'$.

Also auch Bog. $m\varepsilon = 0,5'$, weil des Hebekopfs Angriffspunkt bei m und der angegriffene Punkt des Schwanzes bei m bei der epicycloidischen Krümmung des Hebekopfs einerlei Geschwindigkeit haben, so daß die Stelle m des Hebekopfs in ε seyn muß, wenn die Stelle n bei v vom Helm abfällt.

Bei 3 Köpfen ist der Bogen $xm = 120^\circ$, und Länge $x\delta m = \frac{1}{3} \cdot 6,28 \cdot me$.

Es sey nun $me = 1,75'$; so wird $xm\ 3,66'$. Nimmt man $xy = m\varepsilon = 0,5$, so ist y die Stelle, wo sich x befindet, wann der Kopf bei v abfällt; also $ym = 3,66 - 0,5 = 3,16'$.

Die Geschwindigkeit des Rades sey c, $em = r$, die Anzahl Kämme zur Anzahl Triebstöcke $= N : n$, so ist Geschwindigkeit des Kopfs in $m = \frac{N}{n} \cdot \frac{r}{R} \cdot c$.

§. 127.

Nothwendig muß die Einrichtung so getroffen werden, daß der Hammer wieder ganz herabfallen könne, bevor der nachfolgende Kopf x in m ankommt. Man muß also die Zeit zu bestimmen wissen, in welcher der erhabene Hammer wieder herabfällt. Wir wollen die ganze Höhe des Hubs mit b bezeichnen.

Das Gewicht des Helmstücks bc ist = 206 ℔ Berl. $= \frac{206}{66}$ rhl. K. F. = 3,12 K. F. W. das von bm =

100 ℔ $= \frac{100}{66}$ K. F. $= 1,515$ K. F. Bei m ist ein Ring zu 32 ℔ $= 0,484$ K. F. W. angebracht. Es ist also das Gewicht des leeren Helms $= 3,12 + 1,515 = 4,635$ K. F. W. welches wir in seinem Schwerpunkte d als vereint ansehen können; da mc $= 13'4''$ ist, so ist md $= 6'8''$. und bd $= 6'8'' - 4'2'' = 2'6''$. Es ist also auch dasselbe, als wäre statt des Gewichts des ganzen Helms nur das Gewicht $\frac{bd}{ba} \cdot 4,635 = \frac{30}{100} \cdot 4,635 = 1,39$ K. F. W. in a angebracht.

Den Schwerpunkt des Schwanzrings können wir 4' weit von b entfernt annehmen; mit Rücksicht auf diesen haben wir in a einen Druck $= 1,39 - \frac{4}{ba} \cdot 0,484 = 1,39 - 0,184 = 1,206$ K. F. W.

Hierzu kommt noch das Gewicht des Hammers $= 300$ ℔ $= 4,545$ K. F. W. *) Man hat also in a ein Gewicht $= 1,206 + 4,545 = 5,75$ K. F. W. als bewegende Kraft, welche den erhobenen Hammer wieder niedertreibt.

Wir reduciren jetzt die Masse des Helms auf die Stelle a. Die Masse von bc auf c reducirt ist $\frac{1}{3} \times 3,12 = 1,04$ K. F. also auf a gebracht $= \frac{bc^2}{ba^2} \cdot 1,04 = \left(\frac{110}{100}\right)^2 \cdot 1,04 = 1,26$ K. F. W. Die Masse bm auf m gebracht ist $= \frac{1}{3} \cdot 1,515 = 0,505$ K. F. W. also auf die Stelle

*) Erst späterhin habe ich bemerkt, daß ich 300 Pfund statt der angegebenen 150 Pfund hier in Rechnung gebracht habe. Weil aber dieses Beispiel nur zur Erläuterung dienen soll, so schien es mir nicht der Mühe werth, deßhalb alle Berechnungen abzuändern.

a gebracht $= \left(\frac{50}{100}\right)^2 . 0,505 = 0,126$ K. F. W. Die Masse des Schwanzrings auf die Stelle a gebracht $= \left(\frac{48}{100}\right)^2 . 0,484 = 0,111$ K. F. Demnach hat man, mit Inbegriff der Hammermasse,

Masse in a $= 1,260 + 0,126 + 0,111 + 4,545$
$= 6,042$ K. F. W.

Die bewegende Kraft in a hatte man vorhin $= 5,75$ K. F. W. gefunden; folglich

beschleunigende Kraft, mit welcher der Hammer fällt $\Big\} = \frac{575}{604} = 0,95$

Die Abweichung des mit ba beschriebenen Bogens, worin der Hammer herabfällt, von dem lothrechten Falle können wir hier bei Seite setzen; also ist

Zeit des Falls von 1′ Höhe $= \sqrt{\frac{1}{0,95 . 15,6}} = 0,26$ Sek.

Man kann aber gar wohl in der Ausübung annehmen, daß der Hammer vermöge der ihm mitgetheilten Geschwindigkeit beim Abfallen des Daumens vom Helmschwanz noch um $\frac{1}{2}$ Fuß höher geschnellt wird, so daß er wenigstens $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch wieder herabfällt, wenn vw $= \frac{1}{2}$′ ist. Dann hat man also

Zeit des Falls $= \sqrt{\frac{1,5}{0,95 . 15,6}} = 0,32$ Sekunden.

Es würde aber in der Ausübung höchst nachtheilig seyn, wenn der Kopf x früher in der Stelle m ankäme als das Schwanzende diese Stelle im Zurückspringen wieder erreicht hätte.

Man wird daher die Einrichtung so machen, als ob der Helmschwanz 0,4 Sekunden (statt 0,32) nöthig hätte, um von v wieder bis m zurückzukommen. Weil nun der

bis in y gekommene Kopf x in diesen 0,4 Sekunden noch von y bis q vorwärts rückt, so daß $yq = 0{,}4 \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{r}{R} \cdot c$ wird, so muß dafür gesorgt werden, daß yq oder $0{,}4 \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{r}{R} \cdot c < ym$ oder hier $< 3{,}16'$ werde.

Während der Kopf x den Weg y durchläuft, leidet der Helmschwanz gar keinen Druck; da nun $m\varepsilon = 0{,}5'$ ist, so hat die Kraft während der Bewegung des Kopfs von y bis ε herab oder auf dem Wege $y\varepsilon = xm = 3{,}66'$ (vor. §.) nur in dem Theil $m\varepsilon = 0{,}5'$ die Nutzlast zu wältigen. Man kann also hier nicht wie oben bei den Stampfwerken rechnen, wo mit jedem Abfalle eines Stampfers sogleich wieder ein neuer ergriffen wurde, so daß die Last immer und ohnunterbrochen dieselbe bliebe.

§. 128.

Der Hebekopf erreiche die Stelle m mit der Geschwindigkeit C, so wird in m aus der C eine andere

$$\mathfrak{C} = \frac{\Pi}{\Pi + \mathfrak{Q}} \cdot C$$

und man erhält für die Bewegung durch $m\varepsilon$, wenn P' die auf die Stelle m reducirte Kraft ist, die beschleunigende Kraft

$$f = \frac{P' - Q}{\Pi + \mathfrak{Q}}$$

Es sey nun $m\varepsilon = s$, so wird, wenn t die Zeit der Bewegung durch $m\varepsilon$ ist,

$$s = t^2 \cdot fg + t \cdot \mathfrak{C} = \frac{t^2 (P' - Q) \cdot g}{\Pi + \mathfrak{Q}} + \frac{t\Pi}{\Pi + \mathfrak{Q}} \cdot C$$

also

$$C = \frac{(\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot s - t^2 g (P' - Q)}{t\Pi}$$

In dem Augenblick, da der Kopf bei s abfällt, steht der nachfolgende x in y, und lauft frei durch ym. Die Geschwindigkeit welche auf diesem Wege zu der in y noch hinzukommt, heise ζ, so ist

$$\zeta = 2\tau \cdot \frac{P'}{\Pi} \cdot g$$

wenn τ die Zeit der Bewegung durch ym ist; denn während dieser Zeit wirkt die beschleunigende Kraft $\frac{P'}{\Pi}$.

Nun ist ferner am Ende der Beschleunigung bei m

$$\mathfrak{C} + 2tfg + \zeta = C$$

also jetzt

$$\frac{\Pi}{\Pi + \mathfrak{Q}} \cdot C + 2tg \cdot \frac{P' - Q}{\Pi + \mathfrak{Q}} + 2\tau g \cdot \frac{P'}{\Pi} = C$$

Demnach

$$\frac{(\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot s - t^2 g (P' - Q)}{t\Pi} = \frac{\Pi C + 2tg(P' - Q)}{\Pi + \mathfrak{Q}} + \frac{2\tau g P'}{\Pi}$$

oder den Werth von C, welcher hier zur Linken steht, zur Rechten statt C substituirt,

$$\frac{(\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot s - t^2 g (P' - Q)}{t\Pi} \cdot \left(1 - \frac{\Pi}{\Pi + \mathfrak{Q}}\right) = \frac{2tg (P' - Q)}{\Pi + \mathfrak{Q}} + \frac{2\tau g P'}{\Pi}$$

also

$$\mathfrak{Q} \cdot (\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot s - \mathfrak{Q} \cdot t^2 g (P' - Q) = 2t^2 g \Pi \cdot (P' - Q) + 2t\tau g \cdot (\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot P'$$

und

$$t^2 g \cdot (2\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot P' + 2t\tau g \cdot (\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot P' = t^2 g \cdot (2\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot Q + (\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot \mathfrak{Q} \cdot s$$

Demnach

$$P' = \frac{t^2 g \cdot (2\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot Q + (\Pi + \mathfrak{Q}) \cdot \mathfrak{Q} \cdot s}{t^2 g \cdot (2\Pi + \mathfrak{Q}) + 2t\tau g (\Pi + \mathfrak{Q})}$$

Bezeichnen wir also die am Umfange des Wasserrades angebrachte Kraft mit P, und den Raum, welchen ein Punkt im mechanischen Umfange des Rades in der Zeit eines Hubes durchlauft, mit S, so hat man

$$\text{CCXXXV. } P = \frac{s}{S} \cdot \frac{t^2 g.(2\pi + \Omega).Q + (\pi + \Omega).\Omega.s}{t^2 g.(2\pi + \Omega) + 2 s \tau g.(\pi + \Omega)}$$

Es sey xm = Δ, so hat man

$$\Delta = \tau^2 . \frac{P'}{\pi} . g + \frac{\pi}{\pi + \Omega} . tC + 2t . \frac{P' - Q}{\pi + \Omega} . tg$$

und nach gehöriger Substitution des Werths von C

$$\Delta = \frac{\tau^2 g P'}{\pi} + s + \frac{t^2 g (P' - Q)}{\pi + \Omega}$$

Setzt man die Zeit der Bewegung von y bis s (welche hier $\frac{1}{3}$ von der ganzen Umlaufszeit der Daumenwelle ist) = T, so hat man

$$\Delta = \frac{(T - t)^2 . g P'}{\pi} + s + \frac{t^2 g (P' - Q)}{\pi + \Omega}$$

woraus man t durch eine quadratische Gleichung erhält. Aus (CCXXXV) erhält man, T — t statt τ gesetzt, gleichfalls t durch eine quadratische Gleichung. Beide Werthe von t einander gleich gesetzt, giebt die hierher gehörige Fundamentalgleichung, in der die t und τ nicht mehr vorkommen.

Ich unterlasse aber hier die an sich leichte Ausführung dieser Rechnung, weil sie uns einen für die Ausübung zu schwerfälligen Ausdruck giebt, und jede Anwendung auch der schärfsten Gleichung doch keine sehr scharfe Resultate zuläßt, sobald man dabei mit Wasserrädern zu thun hat.

§. 130.

Wir können aber auf einem anderen Wege, den die Ausübung selbst an die Hand giebt, zu einer hinlänglich

genauen für die Ausübung weit leichter anwendbaren Formel gelangen.

Es ist nämlich die Zeit, in welcher der Hebekopf von y bis s kommt, allemal so klein, daß das Wasserrad bei hinlänglicher Masse während dieser Bewegung seine Geschwindigkeit nicht sehr ändern kann. Wir können wenigstens im Vertrauen auf ein sicheres Resultat

$$t = \frac{s}{\Delta} \cdot T, \text{ und } \tau = \frac{\Delta - s}{\Delta} \cdot T$$

annehmen, so daß $t + \tau = T$ bleibt. Hiernach wird

$$t^2 = \frac{s^2}{\Delta^2} \cdot T^2$$

$$t\tau = \frac{(\Delta - s) \cdot s}{\Delta^2} \cdot T^2$$

und aus (CCXXXV)

$$P = \frac{s}{S} \cdot \frac{\frac{s^2}{\Delta^2} \cdot T^2 g \cdot (2\Pi + \Omega) \cdot Q + (\Pi + \Omega) \cdot \Omega \cdot s}{\frac{s^2}{\Delta^2} \cdot T^2 g (2\Pi + \Omega) + \frac{2(\Delta - s) s}{\Delta^2} \cdot T^2 g (\Pi + \Omega)}$$

oder

$$\text{CCXXXVI.} \quad P = \frac{s}{S} \cdot \frac{s T^2 g \cdot (2\Pi + \Omega) \cdot Q + (\Pi + \Omega) \cdot \Omega \cdot \Delta^2}{s T^2 g (2\Pi + \Omega) + 2(\Delta - s) \cdot T^2 g (\Pi + \Omega)}$$

s. auch (CCXXXVIII).

Zur Anerkennung der Brauchbarkeit dieser Formel dient noch folgendes.

Die Formel (CCXXXV) können wir auch so schreiben:

$$P = \frac{s}{S} \cdot \frac{g \cdot (2\Pi + \Omega) \cdot Q + \frac{(\Pi + \Omega) \cdot \Omega \cdot s}{t^2}}{g \cdot (2\Pi + \Omega) + \frac{2\tau g}{t} \cdot (\Pi + \Omega)}$$

Da nun t nur um ein weniges zu klein, und τ um ein weniges zu groß genommen ist, so ist das 2te Glied im Zähler,

so wie das 2te im Nenner um etwas weniges zu groß; es kann also im Ganzen die Formel (CCXXXVI) nur äußerst wenig vom wahren Werthe von P abweichen.

§. 131.

Bei den Stampfwerken wurde $s = \Delta$ angenommen. Für diese Voraussetzung verwandelt sich die vorstehende Gleichung in die folgende:

$$P = \frac{s}{S} \cdot \left(Q + \frac{(\Pi + \Omega) . \Omega . s^2 . s}{s^2 . T^2 g\,(2\Pi + \Omega)}\right)$$

oder

$$\text{CCXXXVII. } P = \frac{s}{S} \cdot \left(Q + \frac{(\Pi + \Omega) . \Omega . s}{T^2 . g . (2\Pi + \Omega)}\right)$$

welches mit (CCXXVIII) einerlei ist.

Es kann aber auch bei Stampfwerken gar wohl der Fall eintreten, daß $s < \Delta$ wird, d. h. daß mit dem Abfalle eines Stampfers nicht sogleich wieder das Ergreifen eines neuen Stampfers verbunden ist. Dann gebraucht man die hier gefundene allgemeinere Gleichung, welche die (CCXXVIII) nur als einen besonderen Fall unter sich begreift.

§. 132.

Wir wollen nunmehr die Rechnung (§. 127.) weiter ausführen. Wir nehmen 100 Hammerschläge für eine Minute an, die Geschwindigkeit c des Wasserrades zu 6′, seinen mechanischen Halbmesser = 8′.

Hiernach durchlauft des Rades mechanischer Umfang in 1 Minute 60 . 6 = 360′, und die Anzahl der Umgänge in 1 Minute $= \frac{360}{6,28 . 8} = 7,16$. Mit Hülfe eines einfachen Vorgeleges sollen nun durch eine 3 hübige Welle

100 Schläge in 1 Minute bewirkt werden, also muß die Daumenwelle $33\frac{1}{3}$ Umgänge machen. Demnach

$$\frac{N}{n} \cdot 7{,}16 = 33{,}33$$

und

$$N = \frac{7{,}16}{33{,}33 \cdot n} = 4{,}65 \cdot n$$

Es sey nun der mechanische Durchmesser der Trillingswelle $= 2{,}4'$; also der Umfang $= 3{,}14 \cdot 2{,}4 = 7{,}536' = 90{,}432''$. Nehmen wir 16 Triebstöcke, so wird die Schrift $= \frac{90{,}43}{16} = 5{,}65''$, welches für die Triebstöcke überflüssige Stärke giebt. Also $n = 16$ und $N = 4{,}65 \cdot 16 = 74{,}4$, wofür wir 76 nehmen können.

Um den Hammer 1' hoch zu erheben, fanden wir (die oben bemerkte weitere Aufschnellung bei Seite gesetzt *)) oben $cm = 1{,}75'$; $ye = xm = \frac{6{,}28 \cdot 1{,}75}{3} = 3{,}663 = \Delta$.

Weil nun das Wasserrad in 1 Minute 7,16 Umgänge macht, also die Daumenwelle $\frac{76}{16} \cdot 7{,}16 = 34$ Umläufe machen muß, so ist

$$\left.\begin{array}{r}\text{Umlaufszeit der}\\ \text{Daumenwelle}\end{array}\right\} = \frac{60}{34} = 1{,}76 \text{ Sekunden}$$

und

---

*) Durch diese beim Abfalle des Hebekopfs noch erfolgende Aufschleuderung wird der Effekt des Hammerschlags allerdings vergrößert. Dagegen braucht aber auch der Helmschwanz längere Zeit, um wieder bis in m hinauf zu springen, und der Kopf x darf um so viel später wieder angreifen.

Zeit der Bewegung von y bis oder von x bis m d. i. T $\Big\} = \frac{1,76}{3} = 0,587$ Sek.

Da die Geschwindigkeit des Wasserrades = 6′ ist, so durchlauft sein Umfang in 0,587 Sekunden einen Raum = 0,587 . 6 = 3,522′; also

$$\frac{s}{S} = \frac{3,663}{3,522} = 1,04. \quad \text{Dabei } s = 0,5'.$$

Nach den obigen Angaben und Berechnungen (§. 127) ist die in a wirkende bewegende Kraft = 5,75 K. F. W. Eben dieses ist zugleich die Last, welche bei a dem Hebekopf in m entgegenwirkt. Es ist also für die Stelle m (den Hammer zu 300 ℔ angenommen s. Note zu §. 127.)

$$Q = 2 \,.\, 5,75 = 11,5 \text{ K. F. ohne Reibung.}$$

Mit Rücksicht auf sämmtliche Nebenhindernisse beiläufig

$$Q = 14 \text{ K. F. W.}$$

Nach (§. 127) ist die Masse des Hammers mit Helm für die Stelle a = 6,042 K. F. W. also auf m gebracht

$$\mathfrak{Q} = 2^2 \,.\, 6,042 = 24,17 \text{ K. F. W.}$$

Gewöhnliche Stärke der Radkränze würden Π nicht hinlänglich groß geben; sie lassen sich aber leicht so verstärken, daß $\Pi = 4 \,.\, \mathfrak{Q}$ oder etwa 97 K. F. W. wird. Hiermit erhält man aus CCXXXVII.

$$P = 1,04 \,.\, \frac{0,5 \,.\, 0,587^2 \,.\, 15,6 \,.\, 218 \,.\, 14 + 121 \,.\, 24 \,.\, 3,66^2}{0,5 \,.\, 0,587^2 \,.\, 15,6 \,.\, 218 + 6,32 \,.\, 0,587^2 \,.\, 15,6 \,.\, 121}$$

$$= 1,04 \,.\, \frac{585 \,.\, 14 + 39043}{585 + 4109} = 1,04 \,.\, 10,06$$

$$= 10,46 \text{ K. F. W.}$$

§. 133.

Es ist nicht unwichtig, zu sehen, wie viel Wasser erfordert würde, wenn mit jedem Abfalle eines Hebekopfs sogleich wieder ein anderer Hammer ergriffen würde. Für

diesen Fall wäre die erforderliche Anzahl von Hämmern $= \frac{y'}{m'} = \frac{3,66}{0,5}$, wofür wir 7 nehmen können. Nach (CCXXXVII) wird jetzt

$$P = 1,04 . \left(14 + \frac{121 . 24 . 0,5}{0,344 . 15,6 . 218}\right)$$
$$= 15,85 \text{ K. F. W.}$$

So bräuchte man also zur 7fachen Wirkung nur die Hälfte mehr Wasser als zur einfachen.

§. 134.

Da übrigens $\frac{\Delta}{T}$ die mittlere Geschwindigkeit der Hebeköpfe bei x oder m bezeichnet, die wir durch C. ausgedruckt haben, so erhalten wir auch statt (CCXXXIII) indem wir im Zähler und Nenner mit T^2 dividiren,

$$\text{CCXXXVIII. } P = \frac{s}{S} . \frac{sg.(2\pi + \Omega).Q + C^2.(\pi + \Omega).\Omega}{sg(2\pi + \Omega) + 2(\Delta - s).g.(\pi + \Omega)}$$

eine Formel, die bequemer ist als die (CCXXXVI).

§. 134. *

Zum Schluß dieses Kapitels noch drei Bemerkungen für die vollkommnere Einrichtung eines Hammerwerks:

1) Aus denselben Gründen, wie bei Bestimmung der Gestalt der Kämme an Kamm- und Stirnrädern, muß der Hebekopf bei Aufwerfhämmern cykloidisch und bei Schwanzhämmern epicykloidisch abgerundet seyn.

2) Weil hier alles darauf ankommt, den Zustand der Erhitzung des Eisens mit größtmöglichem Vortheile zu benutzen, so muß man dem auf den Ambos kommenden glühenden Eisen in einer bestimmten Zeit so viele Schläge zu

geben suchen, als nach den Umständen nur immer möglich ist. Da nun die Theorie der Ramm=Maschine lehrt, daß doppeltes Gewicht bei einfacher Fallhöhe mehr wirkt als einfaches Gewicht bei doppelter Fallhöhe, so halbire man lieber den Hub (§. 124) und verdoppele das Gewicht (§. 125), daß also der Hebekopf beim Aufwerfhammer nur halb so hoch hebt, beim Schwanzhammer nur halb so tief druckt. Auf solche Weise kann man allemal die Einrichtung für $\frac{1}{3}$ mehr Schläge machen, und dieses um so mehr, wenn man

3) eine elastische Stange, Stoßreitel, anbringt, an welchen der erhobene Hammer jedesmal anschlagen muß.

Neuntes Kapitel.

Einige Bemerkungen über lothrechte Erhebungen.

§. 135.

Man denke sich an einem horizontalen Wagbalken z. B. 5′ weit von der Umdrehungsaxe eine in die Mitte eines Stiefels lothrecht herabhängende Kolbenstange. Der Wagbalken werde nun gleich hoch oberhalb und unterhalb seiner wagrechten Lage in Bewegung gesetzt, so daß der Kolbenhub im Ganzen 3′ betrage, so muß nothwendig die Lage der Kolbenstange während dieser Bewegung von der lothrechten Richtung abweichen. In Bezug auf den hiermit verbundenen Verlust an Kraft könnte nun dieser Umstand meistens als unbedeutend bei Seite gesetzt werden; aber das Hin- und Herwuchten des Kolbens ist für den Effekt sehr nachtheilig und richtet denselben sehr bald zu Grunde. Deßhalb, und weil bei solchen Einrichtungen, wie bei der Dampfmaschine, auch an der lothrechten Bewegung der Kolbenstange selbst viel gelegen ist, bleibt es immer wichtig, eine solche Einrichtung zu treffen, bei welcher die Abweichung von der lothrechten Richtung unmerklich gemacht wird. Vor etwa 21 Jahren verfiel ich auf die Einrichtung (Fig. 9.). Ob

sie schon früher bekannt war, weiß ich nicht. Auf jeden Fall verdient sie beachtet zu werden.

In A und B denke man sich die Durchschnitte zweier parallelen Wellen; k, e, sind die Mittelpunkte dieser Durchschnitte; km, en sind zwei gleich lange wagrechte Aerme, die mit einer lothrechten Stange mn mittelst Gewerbe bei m und n mit einander verbunden sind. Diese Verbindungsstange ist in ihrer Mitte a so eingerichtet, daß sich in a eine Kolbenstange lothrecht einhängen läßt, deren Richtung also in unserer Zeichnung in die lothrechte mn fällt.

Die Bewegung der beiden Aerme geschieht hier durch die Stangenleitung D, welche bei z in den lothrechten Arm E eingreift. Die Stangenleitung wird durch eine Kurbel an einem Rade in Bewegung gesetzt. Wird der Arm km in die Lage kc gebracht, so daß zu gleicher Zeit der Arm en in die Lage ed kommt, also cd die jetzige Lage der Verbindungsstange mn ist, und ist b die Mitte von cd, so ist das obere Ende der Kolbenstange aus a bis b erhoben worden, also ab die Höhe des halben Hubs. Macht der Arm km dieselbe Winkelbewegung nach unten, so daß er in kw fällt, und zugleich en in die Lage ex kommt, also mn in die Lage wx, und ist γ die Mitte von wx, so ist aγ die untere Hälfte des Kolbenhubs. Der Kolben wird also im Ganzen von γ bis b erhoben.

Durch c sey die pg, und auf diese aus a die av und aus b die bv′ senkrecht gezogen. (v und v′ fallen in der Zeichnung wegen ihres zu geringen Abstandes in einem physischen Punkt zusammen).

Die hierher gehörige Frage ist nun

1) wie hängt die Höhe des Hubs von sämmtlichen hierbei vorkommenden Bestimmungsstücken ab?
2) Wie groß ist vv′ d. i. die Abweichung beider Perpendikel av und bv′ von einander?

§. 136.

Wir bezeichnen

Den halben Erhebungswinkel ckm . . mit α

Die Armlänge $km = en$ . . . . — r

Die Armlänge kz . . . . — r'

Die Länge der Verbindungsstange mn . — λ

Die Höhe des halben Kolbenhubs ab *) — b

Die Höhe des Kurbelarms . . . . — k

so erhält man

$$ab = av + bv = mv - ma + \sqrt{(bc^2 - cv^2)}$$

oder

$$b = r.\,\text{Sin.}\,\alpha - \tfrac{1}{2}\lambda + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\lambda^2 - r^2.\,\text{Sinv.}\,\alpha^2)}$$

Daher

$$\text{CCXXXIX.}\ \lambda = \frac{r^2.\,\text{Sinv.}\,\alpha^2 + (b - r.\,\text{Sin.}\,\alpha)^2}{r.\,\text{Sin.}\,\alpha - b}$$

Dabei ist $\text{Sin.}\,\alpha = \frac{k}{r}$ und $\text{Sinv.}\,\alpha = 1 - \text{Cos.}\,\alpha$

$$= 1 - \sqrt{\left(1 - \left(\frac{k}{r}\right)^2\right)};\ r^2.\,\text{Sinv.}\,\alpha^2 =$$

$$r^2.\left(1 - \sqrt{\left(1 - \left(\frac{k}{r}\right)^2\right)}\right).$$

Substituirt man diese Werthe in der vorstehenden Gleichung, so kommt man auf die folgende:

$$\frac{k}{r'} = \frac{C + \sqrt{(C^2 - 4.\,AD)}}{2A}$$

Dabei ist

---

*) Wenn auch wirklich b nicht lothrecht über a liegt, und wenn sogar b um 1/2 Zoll zur Rechten oder Linken von der durch a gezogenen lothrechten Linie fallen sollte, so könnte doch allemal $av + bv'$ mit der Länge von ab für einerlei genommen werden.

$$A = 4r^4 + (\lambda + 2b)^2 . r^2$$
$$C = 2r . (b . (\lambda + b) + 2r^2) . (\lambda + 2b)$$
$$D = b . (\lambda + b) . (4r^2 + \lambda + b)$$

Hiermit erhält man also

$$\text{CCXL.} \quad k = \frac{r' . (C + \sqrt{(C^2 - 4 . AD)})}{2A}$$

In der Ausübung wird man entweder nach λ oder nach k fragen, da dann diese beide Gleichungen diese Fragen beantworten.

Für die Anwendung noch folgende Bemerkung: Der Nenner in (CCXXXIX) ist $r . \text{Sin.}\,\alpha - b$ oder $\frac{rk}{r'} - b$. Verlangt man also, daß $b = k$ werden soll, so kann der Forderung nur unter der Bedingung Genüge geschehen, daß $r > r'$ sey. Ueberhaupt muß $\frac{rk}{r'} > b$ oder $rk > r'b$ seyn.

§. 137.

Es ist noch die 2te Frage (§. 135.) zu beantworten eh und df seyen Perpendikel auf pg, so ist

$$cv' = \frac{cb}{cd} . cf = \frac{1}{2}\, cf$$

und wir erhalten

$$vv' = cv = cv' = r . \text{Sinv.}\,\alpha - \tfrac{1}{2}\, cf$$

wo also noch cf gesucht werden muß.

Es ist aber

$$cf = \lambda . \text{Cos.}\, dcg = \lambda . \text{Cos.}\,(dce - hce)$$
$$= \lambda . \text{Cos.}\,(dce - cen)$$

Der Winkel dce giebt sich durch

$$\text{Cos.}\, dce = \frac{ce^2 + cd^2 - ed^2}{2 . ce . cd}$$

wo $ce^2 = ch^2 + he^2 = r^2.(1 + \text{Sinv.}\,\alpha)^2 + (\lambda - r.\,\text{Sin.}\,\alpha)^2$

$$cd^2 = \lambda^2$$
$$ed^2 = r^2$$

Der Winkel cen giebt sich durch

$$\text{tang. } cen = \frac{vn}{en} = \frac{he}{en} = \frac{\lambda - r.\,\text{Sin.}\,\alpha}{r}$$

womit also cf folglich auch vv' gefunden ist.

Ex. Es sey $k = b = 1,5'$; $r' = 6'$; $r = 6,1'$; so ist $\text{Sin.}\,\alpha = \frac{1,5}{6} = 0,25$; $r.\,\text{Sin.}\,\alpha = 1,525$; $\text{Sinv.}\,\alpha = 0,03178$; $r.\,\text{Sinv.}\,\alpha = 0,19386$; $r^2\,\text{Sinv.}\,\alpha^2 = 0,0375$. Daher

$$\lambda = \frac{0,0375 + (1,5 - 1,525)^2}{1,525 - 1,5}$$

$$= \frac{0,0381}{0,025} = 1,524'$$

Ferner $r.(1 + \text{Sinv.}\,\alpha) = 6,1 . 1,03178 = 6,294$; $r^2.(1 + \text{Sinv.}\,\alpha)^2 = 39,61$; $\lambda - r.\,\text{Sin.}\,\alpha = 1,524 - 1,525 = -0,001$; man kann also hier $(\lambda\ r.\,\text{Sin.}\,\alpha)^2 = 0$ setzen. Demnach $ce^2 = 39,61$; $cd^2 = 1,524^2 = 2,322$; $ed^2 = 6,1^2 = 37,210$ und $\text{Cos. } dce = \frac{39,61 + 2,322 - 37,210}{2 . 6,294 . 1,524} = \frac{4,712}{19,184} = 0,245$. Also $dce = 75^\circ\ 49'$; $\text{tg. } cen = -\frac{0,001}{6,1}$, wofür man hier 0 zu nehmen hat, weil nicht alles in größter Schärfe genommen ist. Demnach $cf = \lambda.\,\text{Cos. } dce = 1,524 . 0,245 = 0,373'$, und $cv' = \frac{1}{2}\,cf = 0,1865$; $cv = r.\,\text{Sinv.}\,\alpha = 0,1938$, und $cv - cv' = 0,1938 - 0,1865 = 0,0073' = 1,05'''$.

§. 138.

Eine meines Wissens spätere Erfindung ist das verschiebbare Parallelogramm an einem Wagbalken, welches in England zur lothrechten Erhebung der Kolbenstangen in den Dampfcylindern angegeben worden ist.

Es sey ei (Fig. 10.) ein horizontaler Wagbalken, der sich um e frei herumdrehen läßt; ac ein demselben parallelliegender Wagbalken, der sich um a dreht, und bcdi ein aus 4 starken Stäben zusammengesetztes Parallelogramm, mit Scharniren in den 4 Ecken. Dieses ist in d und i aufgehängt.

Beide Hebelärme ac, ei sind also durch die Verbindungsstange dc mit einander verbunden, welche eine von den Seiten des Parallelogramms ausmacht; die Stange ib ist nicht mit dem Hebelarm ac verbunden, sondern hängt mit einer besonderen wagrechten Verbindungsstange cb zusammen. Wird nun an der Ecke b des Parallelogramms eine Kolbenstange in der lothrechten Richtung bv aufgehängt, so wird solche beim Auf- und Niedergange des Wagbalkens ac sehr genau in der lothrechten vbk bleiben.

Kommt z. B. ac in die Lage al, so muß zu gleicher Zeit die Stelle d, die mit der c durch die Verbindungsstange cd zusammenhängt, in einem mit ed beschriebenen Kreise dx sich aufwärts bewegen; und weil die Länge der Stange cd unveränderlich ist, so ergiebt sich die Stelle f, bis zu welcher die d erhoben wird, indeß die c bis in l fortrückt, durch die sehr leichte geometrische Konstruktion des Dreiecks lef, indem außer der Grundlinie le auch die beiden Seiten lf = cd und ef = ed gegeben sind.

Verlängert man die ef bis eg, so daß eg = ei wird, ist

eg die Lage des Wagbaums ei, wann
ac in die Lage al gekommen ist.

Jetzt liegen also die Scharnire d und i in f und g, und von dem erhobenen Parallelogramm sind die 3 Ecken l, f und g schon bestimmt;

i ist jetzt in g;
d — — in f
c — — in l

Hiermit giebt sich dann auch die Stelle h, bis zu welcher das Scharnir b erhoben wird. Man hat nämlich wie vorhin nur eine leichte geometrische Konstruktion des △ lgh aus den 3 Seiten lg (der geraden Linie zwischen l und g), gh = ib und lh = di.

Die Stange cb kommt also in die Lage lh, und die von b anfänglich herabhängende Kolbenstange bv fällt in die Lage hz.

Die Einrichtung läßt sich nun allemal leicht so machen, daß die lothrechte hz von der lothrechten bv nur sehr wenig abweicht.

Allemal ist ux' = nc; sollte nun gar keine Abweichung statt finden, so müßte t in x' fallen, also ut = nc werden, oder al. Sinv. lac = lh. Sinv. hlm; also

$$\text{Sinv. hlm} = \frac{\text{al}}{\text{hl}} \cdot \text{Sinv. lac, oder}$$

$$\text{Sinv. e} = \frac{\text{ac}}{\text{bc}} \cdot \text{Sinv. a } (\odot$$

Soll also der Forderung, daß die Stelle b während der Bewegung des Parallelogramms immer in der lothrechten kv bleibe, Genüge geschehen, so müßte es für die Abmessungen, von welchen diese Forderung abhängt, ein Verhältniß geben, nach welchen Sinv. e : Sinv. a unveränderlich, nämlich = ab : bc wäre.

Dieses ist aber unmöglich, wie aus nachfolgender Betrachtung erhellet.

Beim ersten Anfange der Bewegung, wo ac sich um a dreht, also de zugleich um e, hat man

$$\text{Sin. } e : \text{Sin. } a = ac : de$$

also

$$\text{Sinv. } e : \text{Sinv. } a = ac^2 : de^2 \text{ ((}$$

(s. m. Trig. S. 267. No. XIII.) weil hier der Winkel a für den Anfang der Erhebung sehr klein angenommen werden muß. Aber dieses Verhältniß ändert sich während der Fortdauer der Bewegung von Augenblick zu Augenblick, so daß endlich Sinv. a sich schneller ändert, als Sinv. e.

Wird z. B. das Scharnir l im Kreise fortgeschoben, z. B. um 10 Grade, so kann sich, wann lc schon etwas groß ist, der Halbmesser ek nur wenig drehen, also Sinv. e sich nur wenig ändern, und nicht im Verhältnisse ac : bc.

Käme endlich l mit a und f beinahe in eine gerade Linie, so würde in diesem Augenblick l noch um einige Grade fortrücken können, ohne daß f merklich fortrückte, oder der Winkel e sich merklich vergrösserte.

Ueber diejenige Stelle hinaus, wo l mit a und f eine gerade Linie bildet, würde sogar f wieder niederwärts gezogen, also Sinv. e wieder abnehmen, indeß Sinv. a zunähme. Also kann der Bedingung $\text{Sinv. } e = \frac{ac}{bc} \cdot \text{Sinv. } a$ kein Genüge geschehen, folglich auch b sich nicht in der lothrechten bk fortbewegen.

§. 139.

Macht man $\frac{ac}{bc} = \frac{ac^2}{de^2}$, also $1 : bc = ac : de^2$ oder $bc \cdot ac = de^2$, so wird de die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen bc und ac.

Für die lothrechte Erhebung der Stelle b des verschiebbaren Parallelogramms würde erfordert, daß während der Erhebung des Wagbalkens ac beständig Sinv. e $= \frac{ac}{bc}$. Sinv. a bliebe, welches aber nur für die Paar ersten Grade mit sehr großer Genauigkeit möglich ist (s. die Gleichung ⊙). Nun ist aber für die Paar ersten Grade der Bewegung (nach ☾) allemal sehr nahe Sinv. e $= \frac{ac^2}{de^2}$. Sinv. a

Nimmt man also $\frac{ac}{bc} = \frac{ac^2}{de^2}$, so ist für die ersten Grade der Bewegung sehr nahe Sinv. e : Sinv. a $= ac^2 : de^2 = ac : bc$ wie es für die lothrechte Erhebung nach (⊙) seyn soll. Ich glaube daher für eine zweckmäßige Einrichtung der Regel festsetzen zu müssen:

„Man ordne die Längen bc, ac und de so zusammen, daß bc . ac $= de^2$ werde, oder daß de die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen bc und ac sey."

§. 140.

Aufg. Die durch die verschiedenen Abmessungen der einzelnen Theile bestimmte Höhe des Hubes durch Rechnung zu finden.

Aufl. 1. Es sey lac $= \beta$, so ist jeder Winkel an der Grundlinie alc $=$ acl $= \frac{180^\circ - \beta}{2}$; es sey ferner ace $= \gamma$, so wird lce $= \gamma - \frac{180^\circ - \beta}{2} = \gamma + \frac{1}{2}\beta - 90^\circ$. Der Winkel γ ist $= 90^\circ +$ arc. tang. $\frac{de}{cd}$.

2. Aus el, ce und lce giebt sich, wenn man

$$cl = p, \; ce = q \text{ und } lce = \delta$$

setzt,

$$le^2 = p^2 + q^2 - 2pq.\,\text{Cos.}\,\delta$$

Dabei ist

$$p^2 = ac^2 + al^2 - 2al.\,ac.\,\text{Cos.}\,\beta$$
$$= 2ac^2 - 2ac^2.\,\text{Cos.}\,\beta$$
$$= 2ac^2.\,\text{Sinv.}\,\beta$$
$$\delta = \gamma + \tfrac{1}{2}\beta - 90^\circ = \tfrac{1}{2}\beta + \text{arc. tang.}\,\frac{de}{cd}$$
$$q^2 = cd^2 + de^2$$

3. Aus le, lf und ef giebt sich fle + efl = elh. Auch hat man

$$elc + cln = eln; \; uln = 90^\circ.$$

Also

$$ulh = 360^\circ - (eln + uln + elh)$$
$$= 270^\circ - (elc + cln + efl + fle)$$

Dabei ist

$$cln = 90^\circ - nel = 90^\circ - \frac{180 - \beta}{2} = \tfrac{1}{2}\beta$$

Also

$$ulh = 270^\circ - (elc + \tfrac{1}{2}\beta + efl + fle)$$

Der Winkel elc giebt sich aus cl, ce und lce (No. 1).

4. Nunmehr hat man

$$ht = lh.\,\text{Sin.}\,ulh = bc.\,\text{Sin.}\,ulh$$

und

$$\alpha h = \alpha t + ht = nl + ht$$
$$= al.\,\text{Sin.}\,\beta + bc.\,\text{Sin.}\,ulh$$
$$= ac.\,\text{Sin.}\,\beta + bc.\,\text{Sin.}\,ulh$$

Schwingt der Wagbalken ac um gleiche Winkel oberhalb und unterhalb ac, so ist 2. αh die ganze Höhe des Hubes.

§. 141.

Ex. Es sey al = ac = 10'; bc = 5'; ef = de beiläufig = $\sqrt{5.10}$ oder gerade = 7'; also ei = ed + di = 12'; ed + fl = 4'; β = 15°; so hat man dce = arc. tg. $\frac{7}{4}$ = 60° 16'; $\delta = \frac{1}{2}\beta$ + 60° 16' = 67° 46'. Ferner $p^2 = 2ac^2 . (1 - \text{Cos.}\ \beta)$ = 6,8; q^2 = 16 + 49 = 65; p = 2,61; q = 8,06; 2pq = 42,07; Cos. δ = 0,3783794.

Daher

$$le^2 = 6{,}8 + 65 - 42 . 0{,}3783 + 56;\ le = 7{,}48.$$

Man hat nunmehr

$$\text{Cos. elf} = \frac{el^2 + fl^2 - ef^2}{2 . el . fl} = \frac{56 + 16 - 49}{14{,}96 . 4}$$
$$= 0{,}3843$$

also

$$elf = 67°\ 24'$$

Aus ce = q, cl = p, und el = 7,48 wird nun (Trig. §. 27. VII.)

$$\text{Cos. elc} = \frac{el^2 + cl^2 - ce^2}{2 . el . cl} = \frac{56 + 6{,}8 - 65}{14{,}96 . 2{,}61}$$
$$= -0{,}05635$$

also elc = 93° 14'.

Demnach

$$ulh = 270° - (93°\ 14' + 7°\ 30' + efl + 67°\ 24')$$
$$= 101°\ 52' - efl$$

Es ist aber

$$\text{Cos. efl} = \frac{ef^2 + fl^2 - el^2}{2 . ef . fl} = \frac{49 + 16 - 56}{2 . 7 . 4}$$
$$= 0{,}1607.$$

Also efl = 80° 45', und nunmehr

$$ulh = 101°\ 52' - 80°\ 54' = 21°\ 7'.$$

Daher

$$ht = 5 \cdot \text{Sin. } 21^\circ\ 7' = 5 \cdot 0{,}360268$$
$$= 1{,}8013'$$

und

$$\alpha h = 10 \cdot \text{Sin. } 15^\circ + ht = 2{,}5882 + 1{,}8013$$
$$= 4{,}3895'$$

Demnach

der ganze Hub $2 \cdot \alpha h = 8{,}779'$

§. 142.

Der Erhebungswinkel ulh ist $= 21^\circ\ 7'$ gefunden worden, der also dem gleichzeitigen Erhebungswinkel $\beta = 15^\circ$ zugehört. Der Erhebungswinkel def giebt sich so:

$elf = 67^\circ\ 24'$; $fl = 4'$, also, wenn $f\mu$ auf $m\epsilon$ senkrecht ist, $f\mu = fl \cdot \text{Sin. } 67^\circ\ 24' = 4 \cdot \text{Cos. } 22^\circ\ 36' = 3{,}6928'$. Aber $f\phi = f\mu - \phi\mu = f\mu - (cd - ln) = f\mu - (4 - al \cdot \text{Sin. } \beta) = 3{,}6928 - (4 - 10 \cdot 0{,}25882) = 2{,}2810$. Demnach $\text{Sin. } def = \frac{f\phi}{ef} = \frac{f\phi}{de} - \frac{2{,}2810}{7} = 0{,}32585$, also $def = 19^\circ\ 1'$.

Auch hat man die Erhebung $nl = cd - \mu\phi = 4 - 1{,}4118 = 2{,}5882'$; diese giebt den oben gefundenen Hub $2 \cdot \alpha h = 8{,}779'$. Hieraus läßt sich nun auch die Höhe der Kurbel leicht bestimmen, welche den Arm ac in Bewegung setzt.

§. 143.

Die Abweichung der lothrechten $h\alpha$ von der lothrechten iv ist $xu - lh \cdot \text{Sinv. } ulh = nc - lh \cdot \text{Sinv. } ulh = ac \cdot \text{Sinv. } \beta - lh \cdot \text{Sinv. } ulh$; also im vorliegenden Falle $= 10 \cdot 0{,}03407 - 5 \cdot (1 - \text{Cos. } 21^\circ\ 7') = 0{,}3407 - 0{,}3357 = 0{,}0050' = 0{,}06'' = 0{,}72'''$.

Macht man $b\delta = \frac{1}{2}\,b\alpha$, und hängt nun die Stange so in δ ein, daß ihre Axe in die lothrechte $\delta\pi$ fällt, so beträgt ihre größte Abweichung nur $\frac{1}{2}$ ba $= \frac{0{,}72}{2} = 0{,}36'''$.

§. 144.

Wird ein vorgeschriebener Hub $= 2.\ h\alpha$ verlangt, so könnte man in der Ausübung auf folgende Weise verfahren:

Man nehme ac etwa $= 2{,}5.\ h\alpha$, und schneide $a\alpha$ so ab, daß $a\alpha : ac = \alpha c : ac$ wird. In α errichte man das Perpendikel αh, und schneide ein Stückchen hy (etwa $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{8}\ h\alpha$) ab. Der ac gleich und parallel ziehe man die ye. Jetzt beschreibe man aus h mit $y\alpha$ oder dc, und aus e mit ey $=$ ac Bögen, die einander in g schneiden, und ziehe die eg, auf der man fg $= \alpha c$ abschneidet.

αcdy ist das verschiebbare Parallelogramm. Indem nun ac in al fällt, kann α nicht ganz genau in h fallen. Man beschreibe daher mit dc und ac Bögen aus f und a, die einander in l schneiden, und nunmehr aus g und l mit dc und αc Bögen, die einander z. B. in w schneiden, so ist wgfl die Lage des Parallelogramms, wann ac in al gefallen ist, und man kann nunmehr messen, um wieviel h zur Seite liegt. Daß übrigens die verlangte Höhe des Hubes hiermit nicht merklich abgeändert wird, ist leicht einzusehen *).

---

*) Der Zweck dieser Schrift, der ich nur wenige Bögen bestimmen konnte, erlaubt mir keine Einlassung in umständlichere Beschreibung technischer Konstruktionen, daher ich auch Fig. 9 und 10 es nur bei geometrischen Konstruktionen belassen mußte. Es ist für die Ausübung am besten, an einer und derselben Welle die Einrichtung, welche hier dem Auge nur einfach dargestellt ist, in einer Entfernung von einigen Fussen doppelt

§. 145.

Eine in manchen Fällen sehr brauchbare Art, die Abweichung der Kolbenstange von der lothrechten Richtung zu vermindern (oder auch anderer Stangen, deren lothrechte Stellung während ihrem Auf- und Niedergange wenigstens ohne große Abweichung verlangt wird) ist folgende

Soll z. B. die am Arm ac Fig. 11. aufgehängte Stange be ohne bedeutende Abweichung lothrecht erhoben werden, so lasse man sie in c abschneiden, und ihr unteres Ende c in das Ende c eines horizontalen 25 = 30′ langen Wagebalkens dc eingreifen. Dann hänge man in demselben Kopfe gleich unterhalb c den unteren Theil der Stange, nämlich den ce ein. Die Abweichung wird dann sehr geringe, und wenn man df um die Hälfte dieser Abweichung größer nimmt als dc, und den unteren Theil der Stange in f einhängt, so wird die Abweichung noch halbirt. Ist z. B. der halbe Hub 1,5° und dc = 30′, so ist der Sinus des halben Erhebungswinkels $= \frac{1,5}{30} = 0,05$; also der halbe Erhebungswinkel = 2° 52′; der zugehörige Kosinus ist 0,99848, also die ganze Abweichung = (1 − 0,99848) . 30 = 0,0456′ = 0,547″, und wenn $cf = \frac{0,547}{2} = 0,273''$ genommen und nun der untere Theil der Stange in f eingehängt wird, so ist die ganze Abweichung jetzt nur noch = 0,273″ = 3,276‴ welches

---

anzubringen. Beide Parallelogramme werden dann, der Welle parallel, in ihren Winkelpunkten durch horizontale Stäbe unter einander verbunden, um in der Mitte der im b durch beide Parallelogramme laufenden Verbindungsstange die Kolbenstange einzuhängen.

für viele Fälle der Ausübung unbedeutend ist. Ich habe selbst hiervon in der Ausübung Gebrauch gemacht. gh ist eine bei h eingreifende Stangenleitung.

§. 146.

Hierhin gehört auch noch die Einrichtung des Zugs mit Ketten, die sich an einem Wagbaum befestigten hölzernen Bogen anlegen, wie Fig. 12.

gh ist eine Stangenleitung; ch, cα zwei sich um c drehende Aerme, wo cα der gedachte Wagbaum ist, an welchem bei α der Bogen befestigt wird. AB ist die Stange, welche lothrecht auf- und nieder bewegt werden soll. Bei m und p können Stangenhaken angebracht seyn. Bei β lauft über den Bogen herab eine Kette βαp; ebenso von γ aufwärts neben der ersteren eine Kette γαm. Der ganze Schub wird vollendet, indem der Arm ch in die Lage cd gedreht wird. Kommt h in d, so kommt α in γ, so daß x = w wird. Mit dieser Bewegung kommt zugleich m in n, und p in q, auch β in α.

Indem dann d bis h wieder zurück geschoben wird, trit q wieder in p, n wieder in m, γ wieder in α, α wieder in β. Der Arm oder Wagbalken cα bewegt sich also nur in dem Winkelraume αcγ auf- und nieder.

Es ist aber besser, die Stangenhaken wegzulassen, und dagegen in einem hinlänglich breiten Schlitz die Befestigungspunkte m und p anzubringen, wie bei der Stange AB Fig. 12., da dann der Bogen, an welchen sich die Ketten anlegen, mit seinem äußeren Umfange bis in die Mitte des Schlitzes (der Höhe und der Dicke nach verstanden) eingreift.

Die Herzlinie.

§. 147.

Bei den englischen Spinnmaschinen bedient man sich zur wechselsweisen Erhebung und Niederlassung der herumlaufenden lothrechtstehenden Spuhlen herzförmiger Scheiben, wie Fig. 13., die sich um die durch C laufende Axe herumdrehen. Mehr als 2 Millionen Spuhlen werden in England auf solche Weise in ihrer steigenden und fallenden Bewegung erhalten. Auch hat der berühmte Mechaniker zu München, Ritter von Reichenbach, dieselbe Scheibe zur Betreibung eines Druckwerks in München mit gutem Erfolge angewandt.

Man denke sich an einer gemeinschaftlichen Axe durch C zwei einander kongruente Scheiben wie Fig. 13. in willkührlicher Entfernung von einander befestigt, so daß mit der Umdrehung der Axe auch die der Scheiben verbunden ist. Ueber beide Scheiben denke man sich, wie hier über f, eine Leiste gelegt (die mit ihren Enden etwa zwischen ein Paar Gabeln als Leitungen durchlaufen kann, um nicht von beiden Herzen abgleiten zu können), so daß die Leiste (auf welcher man sich die Spuhlen aufstehend denken kann) nieder sinken muß, sobald der Umfang der Scheibe unter ihr tiefer herabfällt, also sobald sich die höchste Stelle f nach g hin dreht. Bei dieser Umdrehung muß nämlich die aufliegende Leiste nach und nach in die Tiefen VIII, VII.... I, d herabsinken, und dann wieder zu den Höhen r, q... g, f hinaufsteigen, und zwar in der lothrechten Linie fd abwärts und in der df aufwärts.

Die Form des Herzes muß so beschaffen seyn, daß mit gleichförmiger Umdrehungsbewegung desselben (d. h. bei unveränderlicher Winkelbewegung) gleichförmiges Steigen und Fallen der aufliegenden Leiste verbunden ist.

§. 148.

Soll die aufliegende Leiste von e bis f abwechselnd steigen und sinken, so verlängere man die lothrechte fe bis zu einem angenommenen Umdrehungspunkte, hier C, und beschreibe mit eC einen Kreis, dessen Umfang man in eine etwas große Anzahl gleicher Theile theilt, wie hier d 1, 1 = 2, 2 = 3 rc. wo ed der lothrechte Durchmesser ist. In unserer Zeichnung ist der halbe Umfang auf jeder Seite von de in 9 gleiche Theile getheilt.

Man schneidet daher auf den Theilungslinien AC, CB, CD die Stücke $Cr = Cd + \frac{1}{9}\, ef$, $Cq = Cd + \frac{2}{9}\, ef$, $Cp = Cd + \frac{3}{9}\, ef$ u. s. f. ab, und nimmt $CI = Cr$, $CII = Cq$, $CIII = Cp$ u. s. f.

Es versteht sich, daß allemal Ce groß genug genommen werden muß, um eine hinlänglich starke Welle durch das Herz führen zu können.

Durch die Punkte d, r, q .... f, VIII, VII ... I zieht man aus freier Hand eine krumme Linie.

Weil aber bei dieser Verzeichnung das Herz bei d einen zu spitzen Einschnitt erhält, so daß die Leiste nicht bis in die Stelle d hinabsinken kann, so darf man nur das untere Stück rdI etwa in das $s\alpha\beta$ abändern, $fk = d\alpha$ nehmen, und $Ck - Cs$ in 8 gleiche Theile theilen. Nunmehr nimmt man $Ct = Cs + \frac{1}{9}(Ck - Cs)$, $Cu = Cs + \frac{2}{9}(Ck - Cs)$, $Cv = Cs + \frac{3}{9}(Ck - Cs)$ ..., bis man in k kommt.

§. 149.

Wie sich ein solches Herz auch zur Bewegung eines Wagbalkens mn, der seinen Umdrehungspunkt in a hat, mittelst eines Wasserrades gebrauchen lasse, zeigt Fig. 14. M ist das Herz, v das 4eckte Ende vom Wellzapfen des

Wasserrades, an welchem das Herz eingeschoben wird. Zur Verminderung der Reibung wird der Wagbalken bei d von oben herab durchschlitzt, und in diesen Schlitz eine Rolle eingelassen. Die bei n eingehängte Kolbenstange B zur Betreibung eines Druckkolbens wird nun durch das auf am aufgelegte Gewicht A, welches bei der Umdrehung des Herzes den Wagbalken dem sinkenden Umfange zu folgen nöthigt, jedesmal wieder aufwärts gezogen. Der Niedergang oder Druck des Kolbens wird durch die aufsteigende Bewegung des Herzes bewirkt.

§. 150.

An der durch C durchgehenden Axe Fig. 13., oder an der durch v (Fig. 14.) durchgehenden sey in der Entfernung R von der Axe eine Kraft P angebracht; auf dem Herz liege die Last Q, so ist für eine halbe Umdrehung der ganze Weg der lothrechten Erhebung = k, und der zugehörige Weg der Kraft = π. R, also, ohne Rücksicht auf die Reibung

$$P \cdot \pi \cdot R = Q \cdot k$$

Aber zu Q kommt noch die Reibung. Wäre die Rolle bei d unbeweglich und μ der Reibungskoefficient, so hätte man

$$P \cdot \pi \cdot R = Q \cdot k + \mu \cdot Q \cdot s$$

wenn s den halben Umfang des Herzes bezeichnet. Nun sey der Halbmesser der Rolle = $\mathfrak{R}$, der Halbmesser des Polzens, um den sie herumlauft, = r, so wird für die bewegliche Rolle

$$P \pi R = Q \cdot k + \frac{r}{\mathfrak{R}} \cdot \mu Q s$$

Man muß also die Herzlinie rektificiren, um s zu erhalten.

§. 151.

Ein willkührliches Stück des inneren Kreises, wie dϕ sey eine Absciſſe = x, ϕo die zugehörige Ordinate = y;

ist nun $\phi\psi = dx$, so ist, wenn ow ein mit Co beschriebener Kreis ist, $wn = dy$; bezeichnen wir nun do mit s, so ist

$$vn^2 = (ds)^2 = ow^2 + wn^2$$

Es ist aber, $C\phi = r$ gesetzt, $ow = \frac{r+y}{r} . dx$, also

$$ds = \sqrt{\left(\left(\frac{r+y}{r}\right)^2 . dx^2 + dy^2\right)}$$

Es ist ferner $d\phi : \phi o = d\phi e : ef$, oder allgemein, wenn wir $ef = k$ setzen,

$$x : y = \pi . r : k$$

also

$$y = \frac{k}{\pi r} . x$$

$$dy = \frac{k}{\pi r} . dx; \; dx = \frac{\pi r}{k} . dy$$

Demnach

$$ds = \sqrt{\left(\left(\frac{r+y}{r}\right)^2 . \frac{\pi^2 r^2}{k^2} . dy^2 + dy^2\right)}$$

$$= dy . \sqrt{\left(\frac{\pi^2 (r+y)^2}{k^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{dy . \sqrt{(\pi^2 . (r+y)^2 + k^2)}}{k}$$

Es sey nun $r + y = z$, so wird

$$ds = \frac{\sqrt{(\pi^2 z^2 + k^2)}}{k} . dz$$

also nach dem binomischen Satze

$$ds = \frac{\pi z}{k} . dz . \left(1 + \frac{k^2}{2\pi^2 z^2} - \frac{k^4}{8\pi^2 z^2} + \frac{k^6}{16\pi^6 z^6} - \text{ꝛc.}\right)$$

folglich

$$s = \frac{\pi}{2k} \cdot z^2 + \tfrac{1}{2} k \,.\, \text{logn.}\, z + \frac{k^3}{16 \,.\, \pi^2 z^2} - \frac{k^5}{64 \,.\, \pi^4 z^4} + \text{ꝛc.}$$
$$+ \text{Const.}$$

Für $z = r$ ist $s = 0$, also vollständig

$$s = \frac{\pi . (z^2 - r^2)}{2k} + \tfrac{1}{2} k \,.\, \text{ln.} \left(\frac{z}{r}\right) + \frac{k^3}{16 \pi^2} \cdot \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{r^2}\right)$$
$$- \frac{k^5}{64 \,.\, \pi^4} \cdot \left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{r^4}\right) + \text{ꝛc.}$$

Für $y = k$ ist $z = r + k$, also

CCXLI. Der halbe Umfang der Herzlinie $\Big\} = \dfrac{\pi . ((r+k)^2 - r^2)}{2k} + k.$

$$\left(\tfrac{1}{2}\, \text{ln.}\, \frac{r+k}{r} + \frac{1}{16 \,.\, \pi^2} \cdot \left(\frac{k^2}{(r+k)^2} - \frac{k^2}{r^2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{64 \,.\, \pi^4} \cdot \left(\frac{k^4}{(r+k)^4} - \frac{k^4}{r^4}\right) + \text{ꝛc.}\right)$$

Das erste Glied der eingeschlossenen Reihe ist für die Anwendung auf vorkommende Fälle gewöhnlich schon hinlänglich.

Nimmt man z. B. $r = 1'$, $k = 2'$, so wird sehr nahe

$$\text{Halber Umfang} = \frac{\pi . (9 - 1)}{4} + 2 . (\tfrac{1}{2}\, \text{ln.}\, 3)$$
$$= 6{,}28 + 1{,}0986 = 7{,}3786'$$

also für diesen Fall (§. 150.), wenn $\frac{r}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{4}$ genommen und $\mu = \frac{1}{6}$ gesetzt wird

$$P . 3{,}14 . R = 2 . Q + \frac{1}{24} . 7{,}378 . Q = 2{,}3 . Q$$

woraus man ersieht, daß die Reibung keineswegs als unbedeutend bei Seite gesetzt werden kann.

Zehentes Kapitel.

Bemerkungen über die Friktionsräder.

§. 152.

Die Reibung an den Wellzapfen ist in vielen Fällen so geringe in Vergleichung mit der Nutzlast, daß sie keine sonderliche Beachtung verdient, und darum auch Anstalten zu ihrer Verminderung in solchen Fällen keinen großen Werth haben. Es treten aber gegentheils auch Fälle ein, wo jene Reibung einen schon merklichen Theil der Kraft erschöpft. Dahin gehört besonders die Reibung an den Wellzapfen großer Dammenwellen, welche in manchen Fällen $\frac{1}{8}$ von der Nutzlast betragen kann. In solchen Fällen ist eine merkliche Verminderung der Reibung von Wichtigkeit. Diese hat man nun durch die Friktionsräder zu bewirken gesucht. Karsten erwähnt zwar derselben (Stat. der festen Körper. VII. Abschn. §. 120); ihr richtiger Gebrauch war ihm aber selbst unbekannt. Er läßt nämlich jeden Wellzapfen in die Vertiefung zwischen zweien neben einander liegenden Rollen einlegen, vergißt aber bei dem hieraus sich ergebenden Vortheil den Nachtheil in Rechnung zu bringen, welchen eine solche Lagerung deßhalb zur Folge haben muß, weil die beiden Friktionsräder, zwischen welchen ein Wellzapfen eingelegt wird, nicht nur den ganzen

lothrechten Druck des Wellzapfens, sondern auch noch, wegen der keilförmigen Wirkung, einen bedeutenden Seitendruck auszuhalten haben. Ueberhaupt lernt man aus seiner kurzen Bemerkung über diese Friktionsräder ihren eigentlichen Vortheil nicht kennen.

§. 153.

Ein Wellzapfen bedarf (statt der gewöhnlichen Anwelle) zu seinem Lager nur eines Friktionsrades, das etwa 24 bis 30 rhl. Zolle im Durchmesser haben kann. Es besteht aus einer hinlänglich starken Axe, die in ihrer Mitte etwa auf die Länge von $2\frac{1}{2}$ Zollen um etwa $\frac{5}{4}$ höchstens $1\frac{1}{2}$ Zolle dicker seyn mag, als im übrigen Theil; dann einem hinlänglich starken Kranze, und 5 oder 6 starken Speigen, welche den mittleren dickeren Theil der Axe mit dem Kranze verbinden. Alle diese Theile werden nach einem vorgegebenen Model von Holze aus einem einzigen Stücke von Eisen gegossen, so daß das Ganze einem kleinen Chaisenrade gleich sieht. Die Axe muß, wenigstens an beiden Enden, welche die Lagerzapfen eines solchen Friktionsrades bilden, so wie der äußere Umfang des Rades vollkommen kreisrund, und beide genau koncentrisch seyn. Das Wasserrad oder die Daumenwelle wird nun mit den Wellzapfen auf ein solches Friktionsrad etwas unterhalb der höchsten Stelle seines Umfangs aufgelegt, wie wir jetzt näher sehen werden.

§. 154.

A (Fig. 15.) sey der lothrechte Durchschnitt eines Friktionsrades.

B der des in w aufliegenden Wellzapfens.

r z der lothrechte Halbmesser des Friktionsrades.

r x der wagrechte Halbmesser von einem Umlaufszapfen des Friktionsrades.

s w der Halbmesser eines aufliegenden Wellzapfens.
s v lothrecht auf die wagrechte r v.
w p senkrecht auf s v.
s q senkrecht auf r s.
w t der s q gleichlaufend
$v r s = \alpha$, $z r s = \beta = 90° - \alpha$.
Der lothrechte Druck oder das halbe Gewicht von B mit Zubehör $= Q$. Die andere Hälfte wirkt nämlich auf das andere gegenüber liegende Friktionsrad.
Die Winkel $v r y'$, $w r z$ sind mit α, β bezeichnet.
Ist nun w y horizontal, so ist $t w y = v s r = \beta$.
Der wirkliche Erfolg ist nun folgender:

Der Druck nach w r ist (das Gewicht des Friktionsrades selbst bei Seite gesetzt) $= Q . \text{Cos.}\ \beta$, also die Reibung am Zapfen D $= \mu . Q . \text{Cos.}\ \beta$; setzt man den Halbmesser $r x = r$, so ist

$$\left.\begin{array}{c}\text{Reibungsmoment am}\\ \text{Umfange von D}\end{array}\right\} = r \mu Q . \text{Cos.}\ \beta$$

Zum Gleichgewicht mit diesem Widerstande wird bei w eine Umdrehungskraft erfordert, die wir p nennen wollen. Ist nun der Halbmesser $r w = \mathfrak{R}$, so hat man

$$\mathfrak{R} . p = r . \mu Q . \text{Cos.}\ \beta$$

und

$$p = \frac{r}{\mathfrak{R}} . \mu Q . \text{Cos.}\ \beta$$

Wäre B eine Daumenwelle mit einem Trilling von n Triebstöcken, die durch ein verzahntes Rad von N Zähnen an der Wasserwelle betrieben würde, und bezeichnen wir die am Umfange des Wasserrades zum Gleichgewicht mit der Reibung bei D erforderliche Kraft mit 𝔭, so hat man, wenn wir den Halbmesser w s mit 𝔯, und den des Wasserrades mit R bezeichnen,

$$p = \frac{N}{n} \cdot \frac{r}{R} \cdot P = \frac{N}{n} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{r}{\mathfrak{R}} \cdot \mu Q \cdot \text{Cos.} \beta$$

§. 155.

Der Umfang des Friktionsrades soll von w nach der Tangente we herumgedreht werden. Hierzu ist aber das Gewicht von B oder das Gewicht Q selbst behülflich; es wirkt nämlich nach we mit einer Kraft = Q . Sin. β, indem wir B als eine Masse ansehen können, die auf der schiefen Ebene te aufliegt, deren Neigung (= β) so klein ist, daß sie vermöge der Reibung in w nicht abgleitet, also mit ihrem ganzen Abgleitungsstreben Q . Sin. β den Umfang des Friktionsrades von w nach e zu drehen strebt.

Mit Rücksicht auf diese Wirkung bleibt daher bei der Umdrehung des Friktionsrades nur noch

$$p = \frac{N}{n} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{r}{\mathfrak{R}} \cdot \mu Q \cdot \text{Cos.} - Q \cdot \text{Sin.} \beta\right)$$

§. 156.

Hierzu kommt aber noch eine dritte Wirkung. Die Masse von B strebt nämlich mit ihrem Gewicht Q in der lothrechten sv abwärts zu sinken, weil der Umfang des Zapfens in p keine Unterstützung hat, oder der Zapfen strebt von w gegen die Linke herabzuwälzen. Diese Wirkung muß das Wasserrad aufheben, um den Zapfen in w zu erhalten; hierzu wird also am Umfange des Wasserrades eine neue Kraft p' erfordert, und man hat

$$p' = \frac{N}{n} \cdot \frac{r}{R} \cdot Q \cdot \text{Sin.} \beta$$

Bezeichnen wir also die gesammte Kraft mit P, welche nämlich am Umfange des Wasserrades nöthig ist, um der Reibung bei D das Gleichgewicht zu halten, und zugleich den

Zapfen B beständig in w zu erhalten, so hat man $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$ oder

$$\mathfrak{P} = \frac{N r}{n R} \cdot Q \cdot \left(\text{Sin.}\, \beta + \frac{r}{\mathfrak{R}} \cdot \mu \cdot \text{Cos.}\, \beta - \text{Sin.}\, \beta\right)$$

oder

$$\text{CCXLII.}\quad \mathfrak{P} = \frac{N r}{n R} \cdot Q \cdot \left(\frac{\mu r}{\mathfrak{R}} \cdot \text{Cos.}\, \beta\right)$$

§. 157.

Es muß nun dafür gesorgt werden, daß die Masse B, ohne einer Unterstützung C zu bedürfen in der Stelle w liegen bleibe, daß also die Stelle w im Umfange des Friktionsrades nicht mit der aufliegenden Last Q tiefer sinken könne. Zu dem Ende darf also in (§. 155.) $\frac{r}{\mathfrak{R}} \cdot \mu \cdot \text{Cos.}\, \beta$ nicht $>$ Sin. β seyn.

Wollte man nun $\frac{r}{\mathfrak{R}} \cdot \mu \cdot \text{Cos.}\, \beta < \text{Sin.}\, \beta$ nehmen, so würde sich die nach nq umlaufende Welle, von w nach t hin fortwälzen, also zur Rechten von B eine Widerlage nothwendig werden. Mit jeder erforderlichen Widerlage entsteht aber an solcher neue Reibung, welches vermieden werden muß. Man muß also β so nehmen, daß

$$\frac{r}{\mathfrak{R}} \cdot \mu \cdot \text{Cos.}\, \beta = \text{Sin.}\, \beta$$

werde, oder

$$\text{CCXLIII.}\quad \begin{cases} \text{Tang.}\, \beta = \dfrac{\mu r}{\mathfrak{R}}. \\ \text{also} \\ \text{Cos.}\, \beta = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{\mu^2 r^2}{\mathfrak{R}^2}\right)}} = \dfrac{\mathfrak{R}}{\sqrt{(\mathfrak{R}^2 + \mu^2 r^2)}} \end{cases}$$

Demnach aus (CCXLII)

$$\mathfrak{P} = \frac{Nr}{nR} \cdot Q \cdot \frac{\mu r}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{(\mathfrak{R}^2 + \mu^2 r^2)}}$$

oder

$$\mathfrak{P} = \frac{N \cdot \mu r r \cdot Q}{nR \sqrt{(\mathfrak{R}^2 + \mu^2 r^2)}}$$

Es ist aber $\sqrt{(\mathfrak{R}^2 + \mu^2 r^2)}$ nicht merklich von $\mathfrak{R}$ verschieden, also hier

$$\text{CCXLIV.} \quad \mathfrak{P} = \frac{N \mu r r}{nR\mathfrak{R}} \cdot Q$$

Dabei muß also β so genommen werden, wie es CCXLIII gemäß ist.

Unter der angenommenen Bedingung für die Lage der Stelle w liegt also B ganz frei auf dem Friktionsrade. Weil aber in der Ausübung, wo der Werth von μ weder unveränderlich ist noch auch selbst, wenn er während dem Umlaufe als unveränderlich angesehen werden könnte, hinlänglich genau angegeben werden kann, also gar nicht zu erwarten ist, daß während dem Umlaufe allemal $\frac{r}{\mathfrak{R}} \cdot \mu$. Cos. β = Sin. β wäre, so wird der Zapfen B auch nicht der Forderung gemäß in w liegen bleiben. Es bleibt daher in der Ausübung allemal nothwendig, nicht nur zur Linken hier bei C, sondern auch zur Rechten eine Widerlage anzubringen, so daß der Zapfen nur einen kleinen Spielraum zwischen den beiden Widerlagen behält, der auf jeder Seite etwa $1\frac{1}{2}$ Linien betragen mag. Diese Widerlagen können auch selbst Walzen seyn.

Es sey z. B. $\mathfrak{R} = 12''$; $r = 1,5''$; $\mu = \frac{1}{6}$, so wird tang. $\beta = \frac{1,5}{6 \cdot 12} = \frac{1}{48} = 0,02083$; also $\beta = 1^\circ\ 11'$; der zugehörige Bogen ist $= 0,02065$. $\mathfrak{R} =$

0,2478″; man rückt also die Lagerstelle w nur um $\frac{1}{4}$ Zoll von z ab. Die Reibung beträgt jetzt nach (CCXLIV) nur $\frac{r}{R}$ oder $\frac{1,5}{12}$ also $\frac{1}{8}$ von der, welche man ohne das Friktionsrad haben würde.

§. 158.

Es kommt noch ein Umstand hinzu, welcher gleichfalls etwas zur Verminderung des Reibungsmomentes beiträgt. Weil nämlich der Druck Q bei der Vorrichtung solcher Friktionsräder auf jeder Seite der Welle unter die zwei Zapfen des Friktionsrades vertheilt wird, so dürfen diese dünner seyn, als die Zapfen der aufliegenden Welle. Ist nämlich $2 . r = d$ und der Durchmesser eines auf dem Friktionsrades aufliegenden Wellzapfens = D, so kann für gleiche Festigkeit d so genommen werden, daß $d^3 = \frac{1}{2} D^3$ wird. Dieses giebt

CCXLV. $d = D . \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ sehr nahe $= 0,8 . D$

Um so mehr ist man also wegen des Vortheils am Ende des vor. §. gesichert, wenn auch auf den Umstand mit Rücksicht nehmen wollte, daß zuweilen momentanische Reibungen an der rechten oder linken Widerlage erfolgen werden.

Eilftes Kapitel.

Vertheilung der Last über ihren Unterstützungspunkten.

§. 159.

Dieser Gegenstand kann in Bezug auf Unterstützungspunkte, die in mehreren Punkten einer Ebene vertheilt sind, zu tiefen Untersuchungen führen, die sich am Ende in leere Spekulationen verliehren. Ich beschränke mich hier auf die Voraussetzung, daß die Unterstützungspunkte in eine einzige gerade Linie fallen, und werde meine Ansichten dabei auch in Bezug auf die Anwendung mittheilen, da diese Lehre für die Ausübung allerdings von Nutzen seyn kann.

Man denke sich einen geraden prismatischen Balken an beiden Enden zur Linken in m und zur Rechten in v, auch zwischen beiden noch in einem dritten Punkte n unterstützt, so daß m, n, v in eine einzige horizontale gerade Linie fallen. Es wäre überflüßig für diese einfache Forderung eine Zeichnung beizufügen.

Den in die Mitte des Balkens fallenden Schwerpunkt denke man sich mit a bezeichnet; das Gewicht des Balkens sey $= R$. Sein Druck auf die Unterstützung

in m sey $= P$; Entfernung am $= \alpha$
in n — $= S$; — — an $= \gamma$
in v — $= Q$; — — av $= \beta$

Betrachten wir nun den Balken als eine vollkommen steife und unbeugsame Hebellinie, so wird

$$P : Q = \beta : \alpha = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta};$$

$$Q : S = \gamma : \beta = \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma};$$

also

$$P : Q : S = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma} = \beta\gamma : \alpha\gamma : \alpha\beta.$$

Nun ist $P + Q + S = R$, also

$$(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) : R = \beta\gamma : P$$
$$(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) : R = \alpha\gamma : Q$$
$$(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) : R = \alpha\beta : S$$

und

$$\text{CCXLVI.} \left\{ \begin{array}{l} P = \dfrac{\beta\gamma}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta} . R \\[2ex] Q = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta} . R \\[2ex] S = \dfrac{\alpha\beta}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta} . R \end{array} \right.$$

Im Werthe von P fehlt im Zähler als Faktor die Entfernung . . α
von Q die Entfernung . β
von S die Entfernung . γ

Der gemeinschaftliche Nenner enthält alle Amben, die sich aus α, β, γ nehmen lassen.

§. 160.

Statt P, Q, S wollen wir A, B, C schreiben; käme nun in derselben Linie eine 4te Unterstützung hinzu, deren Entfernung vom Schwerpunkte $a = \delta$ wäre, und die vom

Balken einen Druck D auszuhalten hätte, so ergäbe sich auf gleiche Weise

$$\text{CCXLVII.}\quad\begin{cases} A = \dfrac{\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} \cdot R \\ B = \dfrac{\alpha\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} \cdot R \\ C = \dfrac{\alpha\beta\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} \cdot R \\ D = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} \cdot R \end{cases}$$

wo in den Zählern der Werthe von A, B, C, D die Faktoren α, β, γ, δ fehlen, die Nenner aber die Summe aller möglichen Ternen ausdrucken, die sich aus α, β, γ, δ machen lassen. Das allgemeine Gesetz fällt hiernach für 5, 6 und mehrere Unterstützungspunkte sogleich ins Auge.

Aber diese Bestimmungen setzen vollkommen steife und unbeugsame Massen voraus, sowohl in Bezug auf den Balken selbst als in Bezug auf die Unterstützungen.

§. 161.

Die Voraussetzung eines vollkommen steifen Balkens findet in der Ausübung nie statt; sie weicht in vielen Fällen sehr bedeutend vom wirklichen Erfolge ab; und weil sie auch in Ansehung der Unterstützungen nie in aller Schärfe statt findet, so ist der Erfolg in der Ausübung nicht etwa von der Art, daß sich die Ausdrücke (§. 160.) den Resultaten der Erfahrung nur näherten, sondern so, als wäre der Balken vollkommen beugsam. Hiermit werden nun die Bestimmungen (CCXLVII) ganz unbrauchbar. Nimmt man dabei eine Unterstützung unter dem Schwerpunkt, so daß an $= \gamma = 0$ würde, so würde (CCXLVII) $A = B = D = 0$, so daß nur noch C übrig bleibt; aber auch im

Nenner des Werthes von C verschwinden 3 Glieder, so daß nur noch $C = \frac{\alpha\beta\delta}{\alpha\beta\delta} . R = R$ übrig bleibt, welches der bekannte statische Satz ist, daß die Unterlage unter dem Schwerpunkte das ganze Gewicht des aufliegenden Körpers zu tragen hat. Schon in alten Schriften findet man daher auch die Frage, wie der Druck eines Balkens, den z. B. vier Arbeiter auf ihren Schultern tragen, unter diese Arbeiter vertheilt würde? Und für einen gleich dicken Balken ergiebt sich dann aus der Antwort das Resultat, daß ein in der Mitte angestellter Arbeiter den ganzen Balken allein zu tragen habe. Wie falsch aber dieses Resultat ist, wird die Folge ergeben. Eigentlich läßt sich die vorgelegte Frage gar nicht beantworten; der Träger in der Mitte kann tragen, soviel er will.

§. 162.

Man denke sich in der nach (§. 159.) verzeichneten Figur den Schwerpunkt a zur Linken von n, und die Unterstützung von n unter a gerückt, so ist der geringste Grad von Beugsamkeit schon hinlänglich, anzunehmen:

> das Gewicht des horizontalen Stücks ma ist auf m und a ebenso gleichmäßig vertheilt, als wäre ma nur an das av angeschoben, ohne mit av zusammen zu hängen; es drückt also $\frac{1}{4}$ R (die Hälfte von ma) auf m, und $\frac{1}{4}$ R auf a. Auf gleiche Weise ruht av $= \frac{1}{2}$ R zur Hälfte in a und zur Hälfte in v; es ist also der gesammte

Druck in m $= \frac{1}{4} R = A$

in a $= \frac{1}{4} R + \frac{1}{4} R = \frac{1}{4} R = C$

in v $= \frac{1}{4} R = B$

Rückt man die mittlere Unterstützung in n, und haben α, β, γ die vorige Bedeutung, so wird

$$\text{CCXLVIII.}\begin{cases} A = \frac{1}{2}\cdot\frac{mn}{mv}\cdot R = \frac{\alpha+\gamma}{2\cdot(\alpha+\beta)}\cdot R \\ B = \frac{1}{2}\cdot\frac{nv}{mv}\cdot R = \frac{\beta-\gamma}{2(\alpha+\beta)}\cdot R \\ C = \frac{1}{2}\cdot\frac{mn}{mv}\cdot R + \frac{1}{2}\cdot\frac{nv}{mv}\cdot R \\ \quad = \frac{\alpha+\beta}{2\cdot(\alpha+\beta)}\cdot R = \frac{1}{2}R \end{cases}$$

so daß der Druck auf die mittlere Unterstützung in n, wo auch n liegen mag, allemal $= \frac{1}{2}$ R bleibt, wenn m, n, v in einer geraden Linie liegen.

§. 163.

Man denke sich unter gedachtem Balken zwischen n und v oder n und m noch eine 4te Unterstützung mit o bezeichnet. Sind nun A, B, C, D die vom Gewichte des Balkens herrührenden Pressungen in m, n, o und v, und ist mn = a, no = b, ov = c, a + b + c = λ, so hat man denselben Erfolg, als wären 3 gleich dicke Balken über den Unterstützungspunkten zusammengeschoben, so daß mn an no und no an ov anstosse. Man hat daher

$$\text{CCXLIX.}\begin{cases} A = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\lambda}\cdot R = \frac{aR}{2\lambda} \\ B = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\lambda}\cdot R = \frac{cR}{2\lambda} \\ C = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\lambda}\cdot R + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\lambda}\cdot R = \frac{a+b}{2\lambda}\cdot R \\ D = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\lambda}\cdot R + \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\lambda}\cdot R = \frac{b+c}{2\lambda}\cdot R \end{cases}$$

Wenn wir gleich nie annehmen können, daß, was wir hier postuliren, m, n, o und v in einer geometrisch geraden Linie liegen, so können wir doch überall in der Ausübung, wo diese Stellen in eine gerade Linie fallen sollen, dieses in soweit bewirken, daß der Balken theils wegen der Weichheit seiner eigenen Masse, theils wegen seiner Beugsamkeit, theils wegen der Weichheit seiner Unterlager, theils wegen der Weichheit des Bodens, auf welchem die Unterlager aufstehen, sich hinlänglich an alle Unterlager anlegt, wenn wir auch nur einen so geringen Grad von Weichheit und Beugsamkeit voraussetzen, als er bei unseren Baumaterialien und dem Boden, worauf gebaut wird, angenommen werden kann.

Von beträchtlichen Graden der Weichheit des Bodens ist übrigens dabei nicht die Rede. Ist der Boden oder sind die Stellen, auf welchen die Unterlager ruhen, beträchtlich nachgebend, so können wiederum ganz andere Resultate zum Vorschein kommen als die CCXLIX.

§. 164.

Zu dem letzteren Falle des vor. §. am Ende gehört auch der, wenn ein Balken von Arbeitern getragen wird. So können 5 Arbeiter einen 3 Zentner schweren Balken bei unveränderten Standpunkten auf sehr verschiedene Weise tragen. z. B.

1) A trägt	25 ℔	oder	1) A trägt	70 ℔
2) B —	36 —	—	2) B —	90 —
3) C —	120 —	—	3) C —	24 —
4) D —	80 —	—	4) D —	45 —
5) E —	39 —	—	5) E —	71 —
	300 ℔			300 ℔

nachdem die Arbeiter an den ihnen angewiesenen Stellen mit dieser oder jener Kraft ihre Schultern an den Balken an-

pressen. Auch könnte der Druck bei Einigen sogar = o seyn, wenn sich z. B. A und E nur anstellten, als ob sie tragen hölfen, in der That aber mit ihren Schultern den Balken nur berührten.

§. 165.

Eben dieser Umstand kann aber auch in wichtigeren Fällen der Ausübung eintreten.

Denkt man sich z. B. den nach §. 159. verzeichneten Balken in den 3 Stellen m, n, und v auf eingetriebenen Pfählen ruhend, so können diese Pfähle sehr verschiedenen Widerstand leisten. Widersteht z. B. der bei m mit einer Kraft von 250 ℔, der bei v mit einer Kraft von 160 ℔ und der bei n mit einer Kraft von 89 ℔, so kann die Bestimmung für C (CCXLVIII), nach welcher der mittlere Pfahl den Druck $\frac{1}{2}$ R auszuhalten hätte, nur in solchen Fällen angewendet werden, wo R oder das Gewicht des ganzen Balkens nicht über 2. 80 = 160 ℔ betrüge.

Für die Zeichnung, welche man sich §. 163. mit 4 Unterstützungspunkten zu denken hat, wo wir uns nun gleichfalls eingetriebene Pfähle denken wollen, sey das Gewicht des Balkenstücks mo = Z, dieses Stücks Schwerpunkt in a, und die Unterstützung in n nicht vermögend, den Druck $\frac{1}{2}$ Z auszuhalten, sondern nur einen bestimmten Druck $C < \frac{1}{2} Z$, o kann man sich die Last Z in a beisammen denken, und es wird

$$mn \,.\, C + mo \,.\, D = ma \,.\, Z$$

also

$$\text{CCL.} \quad D = \frac{ma \,.\, Z - mn \,.\, C}{mo}$$

der Druck des Balkenstücks ov in o wird hier bei Seite gesetzt.

Das Gewicht des Balkenstücks ov sey $= Z'$; wird dieses im Werthe von D mit berücksichtigt, so kommt noch $\frac{1}{2} Z'$ hinzu, und es wird vollständig

$$\text{CCLI.}\quad D = \frac{ma \,.\, Z - mn \,.\, C}{mo} + \tfrac{1}{2} Z$$

Ist $mn = ma = \frac{1}{2} mo$, so wird

$$\text{CCLII.}\quad D = \frac{Z - C}{2} + \tfrac{1}{2} Z' = \frac{Z + Z' - C}{2}$$

Ist $Z' = 0$, $C = \frac{1}{2} Z$, so wird oben $D = \frac{1}{4} Z$.

Ist $Z' = \frac{1}{2} Z$, so wird

$$\text{CCCLIII.}\quad D = \frac{1{,}5 \,.\, Z - C}{2} = 0{,}75 \,.\, Z - 0{,}5 \,.\, C$$

Die Formeln dieses §. gelten bis zu $C = 0{,}5 \,.\, C$

Für größere Werthe von C gelten die CCXLIX. Der Druck in v bleibt $= \frac{1}{2} Z$.

Uebrigens wird bei diesen Bestimmungen vorausgesetzt, daß die übrigen Unterlagen außer D den ihnen zufallenden Druck auszuhalten vermögend seyen, ohne tiefer zu sinken.

Ex. Der Balken mit den 4 Pfählen (§. 163.) sey nach seiner ganzen Länge mv gleichmäßig z. B. mit einer Mauer zu 200 Zentnern beschwert; dieser Balken ruhe in m, n, o und v auf 4 gleichweit von einander entfernten Pfählen, von welchen die m, o und v jeder weit über 100 Zentner zu tragen vermögend seyen; der n aber soll nur 20 Zentner tragen können, ohne tiefer zu sinken: wie wird der Druck auf die 4 Pfähle vertheilt werden?

Hier ist

$Z = \frac{2}{3} \cdot 200 = 133\frac{1}{3}$ Zentner

$Z' = 66\frac{2}{3}$ Zentner; $C = 20$ Zentner.

Daher

$$D = \frac{133\frac{1}{3} + 66\frac{2}{3} - 20}{2} = 90 \text{ Zentner}$$

$$A = \frac{Z - C}{2} = \frac{133\frac{1}{3} - 20}{2} = 56\frac{2}{3} \text{ Zentner}$$

$$B = \frac{Z'}{2} = 33\frac{1}{3} \text{ Zentner.}$$

Zur Probe erhält man $A + B + C + D = 200$ Zentner.

§. 166.

Könnte nun im vorstehenden Beispiele die Unterlage in o den Druck $D = 90$ Zentner nicht aushalten, sondern z. B. nur einen Druck von 30 Zentnern, so würde wieder eine ganz andere Vertheilung des Drucks eintreten. Man hat nämlich

$$\text{CCLIV.} \begin{cases} A = \dfrac{av.(Z + Z') - (nv.C + ov.D)}{vm} \\ B = \dfrac{am.(Z + Z') - (nm.C + om.D)}{vm} \end{cases}$$

C und D sind gegeben.

Ex. Es sey wie vorhin $Z + Z'$ oder $R = 200$ Zentner, die Pfähle gleichweit von einander entfernt, $C = 20$, D aber jetzt $= 30$ Zentner, so hat man

$$A = \frac{3R - (4C + 2D)}{6} = \frac{600 - (80 + 60)}{6}$$

$$= 76\frac{2}{3} \text{ Zentner.}$$

$$B = \frac{3R - (4D + 2C)}{6} = \frac{600 - (120 + 40)}{6}$$

$$= 73\frac{1}{3} \text{ Zentner.}$$

Zur Probe erhält man

$$A + B + C + D = 76\frac{2}{3} + 73\frac{1}{3} + 20 + 30$$
$$= 200 \text{ Zentner.}$$

Anm. Man kann sich nun mehrere solche Balken in parallelen Lagen neben einander durch Querhölzer oder Riegel mit einander verbunden denken, und auf solche Weise die vorstehenden Sätze auch auf Pfählröste anwenden, wenn man noch die Theorie der Festigkeit der Pfähle damit verbindet, welche ich in meiner Anleit. zum Strassen- und Brückenbau mitgetheilt habe, die zur nächsten Ostermesse in eben dieser Verlagshandlung erscheinen wird.

Zwölftes Kapitel.

Von einigen nützlichen Wasserförderungen.

§. 167.

Zu den nützlichsten Wasserförderungsmaschinen gehören die Saugwerke, die vereinbarten Saug- und Druckwerke, der gemeine Heber, der hydraulische Stößer (Stoßheber, Bélier hydraulique), das Scheibenpaternosterwerk und das fränkische Schöpfrad. Auch das Schaufelwerk und die archimedische Schnecke leisten in besondern Fällen gute Dienste.

§. 168.

Karstens Streben, die Theorie der Saugwerke gründlich und genügend zu bearbeiten, ist aus seinem Lehrbegriffe der gesammten Mathematik deutlich zu erkennen. Aber diese Bemühung mußte ihm nothwendig mißlingen, weil er dabei zwei sehr wichtige Hindernisse der Bewegung gar nicht berücksichtigte: 1) den Widerstand des Wassers bei der Bewegung durch Röhren; 2) die Verminderung der Geschwindigkeit, welche bei Bewegungen daraus entsteht, daß nicht blos Widerstand überwunden, sondern auch periodisch neue Masse in Bewegung gesetzt werden muß.

Nicht etwa leere Spekulation oder nur Postulirung möglicher Eräugnisse, sondern eine wirkliche sehr wichtige Maschinenanlage auf der Halbinsel Walloe in Norwegen, wohin ich vor etwa 22 Jahren von der Dänischen Regierung zur Erstattung eines Gutachtens über dortiges Salzwerk berufen wurde, machte mich auf die Beschränktheit der Karstenschen Theorie aufmerksam. Die Saugröhren der in dortigen Kunstthurm aufgestellten Saugwerke waren noch auf eine Länge von 450′ ins Meerwasser fortgeführt, um das aus größerer Tiefe geschöpfte Wasser salzreicher zu gewinnen. Hier verlohr nun jene Theorie alle Anwendbarkeit, und ich ward hierdurch veranlaßt, diese Theorie mit Rücksicht auf jene wichtige Bestimmungsstücke von neuem zu bearbeiten. Schon vor 19 Jahren machte ich die so verallgemeinerte Theorie in meinem Handbuche der Maschinenlehre bekannt. Späterhin habe ich sie im Handbuche der gemeinen und höheren Mechanik (Heidelb. 1807.) S. 465 — 532 vorgetragen *). Von den Druckwerken habe ich oben schon geredet.

§. 168.

Der Heber, welcher vermöge des Drucks der Atmosphäre als blose Röhrenleitung das Wasser aus einem Behältnisse zwar nur nach Stellen ableitet, die tiefer als der Wasserspiegel im Behältnisse liegen, ist dennoch eine in besonderen

---

*) Wie weit die französischen Mathematiker in der Analysis und überhaupt in der reinen Mathematik vorgeschritten sind, (selbst die Mechanik des Himmels ist beinahe ganz Produkt der reinen Mathematik) beweisen uns die Werke von La Grange, La Place, La Croix ꝛc. Aber im theoretischen Theile der Maschinenlehre stehen sie zurück, und haben nicht einmal Kunde von dem, was in Teutschland geschehen ist.

Fällen höchstnützliche Maschine, wie mich besonders der Gebrauch, welchen der geschickte Mechanikus Hr. Bothmar bei einem Wehrbau zu St. Blasien davon machte, überzeugt hat. Diese Maschine, die blose Röhrenleitung, führt nämlich das Wasser auch über Stellen ab, die beträchtlich (dem atmosphärischen Druck gemäß) höher liegen, als der Wasserspiegel im Behältnisse, wofern nur die Ausflußmündung tiefer liegt. Aber auch diese Theorie konnte Karsten nicht bearbeiten, weil er vom Widerstande des Wassers in Röhren keine Kenntniß hatte.

Es wäre überflüßig, hier diese Theorie besonders behandlen zu wollen, da die Ausflußmenge aus der Höhe des Wasserspiegels im Behältnisse über der Ausflußmündung ganz so wie bei allen Röhrenleitungen berechnet wird.

Nur muß die Röhrenleitung vollkommen luftdicht seyn, weßhalb man sie ringsum mit gutem Letten überschlagen müßte, wenn sie von Holz wäre. Zu St. Blasien bestand sie aus zusammengeschrobenen kupfernen Röhren.

Daß übrigens Vorrichtungen dabei angebracht seyn müssen, welche uns in den Stand setzen, zuerst die ganze Röhrenleitung mit Wasser anfüllen zu können, bevor der fortdauernde Abfluß erfolgen kann, versteht sich von selbsten.

§. 169.

Der Bélier hydraulique ist als eine ganz eigene Maschine zur Wasserförderung unter allen bis jetzt angegebenen Wasserförderungsmaschinen die neueste. Sie ist eine französische Erfindung; den Namen gab ihr ihr Erfinder Montgolfier. Eine Beschreibung dieser Maschine findet man in der Beschreibung und Abbildung des hydraulischen Widders Leipzig 1806; vollständiger aber und mit Beifügung einer großen Anzahl angestellter Versuche in Eytelweins Bemerkungen über die Wirkung

und vortheilhafte Anwendung des Stoßhebers Berlin 1803 *). Die Konstruktion ist äußerst einfach. Man denke sich ein Behältniß, das beständigen Wasserzufluß hat, mit einer Röhrenleitung zu 30 = 50 = 80 = 100 = 200 Fuß lang, auch in manchen Fällen noch länger, verbunden; das Ende dieser Röhrenleitung greife in ein zweites Behältniß ein, in welches das Wasser aus ersterem durch den natürlichen Fall einströhme. In der hinteren Wand sey eine Ausflußöffnung mit einer vorhängenden Klappe angebracht, die sich nach innen öffnet. Zur Erleichterung dieses Oeffnens stelle man die gedachte hintere Wand etwas schief, so daß sie innerhalb dem Behältnisse mit dem Boden einen spitzen Winkel von etwa 80° mache, also die vorhängende Klappe, wenn sie nicht von innen besonders angedruckt wird, vermög ihres natürlichen Strebens zur lothrechten Stellung von selbst von der Oeffnung zurückfalle. Ueberdas befestige man noch an die Aussenseite der Klappe einen hervorstehenden Stab, in welchen sich ein kleines durchlochtes Gewicht einschieben läßt, so daß solches nach Gutfinden 2 = 3 = 4 = 5 Zoll von der Aussenseite der Klappe absteht, um das Streben der Klappe, von der Oeffnung zurück zu fallen, auf solche Weise nach Gutfinden vergrößern oder auch mindern zu können **).

---

*) Die Benennung Stoßheber scheint mir die unpassendste: Sie ist kein Heber; mit gleichem Rechte müßte man dann auch die gemeine Pumpe einen Saugheber nennen. Wem meine Benennung hydraulischer Stösser nicht gefällt, der mag den hydraulischen Widder beibehalten, wie ihn der Erfinder selbst nannte. Mir schien im Teutschen der Ausdruck Stösser ganz die Stelle des französischen Bélier zu vertreten.

**) Von solchen anscheinenden Kleinigkeiten und selbst von der Einrichtung dieser Klappe hängt vieles bei dieser Maschine ab. Bei

Auch in der oberen horizontalen Wand, die den Deckel dieses Behältnisses bildet, wird eine Oeffnung angebracht und solche gleichfalls mit einer Klappe belegt, die sich aber von außen nach oben öffnet, sobald das Wasser von unten nach oben stößt. Man kann, um den Rückfall dieser Steigklappe zu beschleunigen, solche durch eine schwache Feder andrucken lassen. Auf diesen Deckel wird nun ein kleiner Windkessel luftdicht aufgesetzt, der die Steigklappe umgiebt. Durch die Haube des Windkessels wird eine Röhre bis nahe über die Steigklappe herabgeführt, nur daß sie der erforderlichen Erhebung der Klappe nicht hinderlich fallen darf. Es ist gut, wenn sich diese Röhre unten trompetenförmig erweitert. Ausserhalb dem Windkessel wird diese Röhre bis zur vorgeschriebenen Stelle des Ausgusses fortgeleitet, so daß sie die Steigröhre bildet.

§. 170.

Zum Anlassen dieser Maschine ist nichts weiter nöthig, als die untere Abflußklappe, während dem Wasser in das Einflußbehältniß einfließt, einigemal mit der Hand hin und her zu bewegen; denn beginnt das wechselnde Spiel der beiden Klappen, so daß ein Theil des durch die Röhren ins untere Behältniß fliesenden Wassers durch die Steigröhre aufgefördert wird, und der übrige Theil durch die untere Klappenöffnung abfließt. Diese Bewegung dauert fort, solange dem oberen Behältnisse Wasser in der erforderlichen Menge zufließt.

§. 171.

Als eine Merkwürdigkeit von französischen Savans, Artistes etc. verdient hier eine Stelle aus der Biblioth.

einem Modelle, das ich von dieser Maschine habe verfertigen lassen, habe ich dieser Klappe eine besondere Einrichtung gegeben.

physico-économique etc. par une Société de Savans, d'Artistes etc. redigée par Sonnini T. I. p. 289. (s. die angef. Beschreib. §. 7.) angemerkt zu werden:

„der hydraulische Widder enthält in seiner Zusam-„mensetzung ein Princip der Bewegung, das bis „jetzt noch unbekannt gewesen ist."

Also ein Princip, das so alt als die Galileischen Gesetze der Bewegung ist, das die Joh. und Daniel Bernoulli so gut kannten, und welches Karsten in der schon vor 46 Jahren von ihm herausgegebenen Hydraulik (XVIII. Abschn.) S. 476 sogar mit Hinweisung auf einen Versuch, den jeder Knabe anstellen kann, so deutlich ausgesprochen hat, war diesen Savans noch unbekannt?

§. 172.

Die Akademie zu Berlin hatte diese Maschine mit Recht ihrer ganzen Aufmerksamkeit gewürdigt; sie machte sie sogar zum Gegenstande einer Preisaufgabe, und bestimmte der besten Abhandlung über die Theorie dieser Maschine für das Jahr 1810 einen Preis von 50 Dukaten. Ich wurde hierdurch veranlaßt, diesen wichtigen Gegenstand selbst zu bearbeiten, und überschickte im April 1810 meine Abhandlung hierüber der königlichen Akademie zu München, die sie auch dem gerade unter der Presse befindlichen Bande ihrer akademischen Abhandlungen noch beigesellte. In demselben Jahre erschien noch Trattato dello Ariete idraulico del Cavaliere Brunacci (Milano. 1810) in gr. 4., und mit Ende 1815 Grundriß einer Theorie des Stoßhebers, nach Maaßgabe der höhern Mechanik, von Wrede, Berlin in gr. 4.

§. 173.

Das Scheibenpaternosterwerk hielt ich vormals keiner großen Aufmerksamkeit werth. Auf einer Reise, die mich vor etwa 4 Jahren auch nach Reichenhall führte, wurde ich durch ein dort angelegtes Scheiben-Paternosterwerk von neuem auf diese Maschine aufmerksam gemacht. Ich wurde hierdurch veranlaßt, sie durch eigene Versuche näher zu prüfen und sie einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen. Auch diese Maschine hat Karsten in seinem Lehrbegr. der ges. Math. nicht richtig behandelt. Da sie vorzüglich beim Wasserbau von großem Nutzen ist, so habe ich in der oben schon erwähnten Anleitung zum Strassen- und Brückenbau ihre Theorie nach meinen Ansichten zu entwickeln gesucht. Sie hat in mechanischer und ökonomischer Hinsicht den besonderen Vorzug vor den gemeinen Pumpen (Saugwerken), daß ihr Effekt nicht von dem guten Zustande der Kolben und der Klappen abhängt, außerdem aber auch noch den mechanischen, daß ihr Effekt auf beständiger Umlaufsbewegung beruht, so daß sie eines gleichförmigen Beharrungsstandes fähig ist, wobei weder der ungleichförmige Schub des Krumzapfens, noch der Umstand, daß die Wassermasse jedesmal von neuem in Bewegung gesetzt werden muß, eintreten kann. Andere Nebenhindernisse, die bei ihr vorfallen, werden durch die Beseitigung der Kolbenreibung hinlänglich vergütet.

§. 174.

Das fränkische Schöpfrad *) ist in Franken eine höchstwichtige Maschine zur Wiesenwässerung. Es besteht

---

*) Es war seit undenklichen Jahren in Franken üblich. Würde ein solches jetzt auch mitten in Baiern erbaut, so müßte man

aus 2 Kränzen mit sehr langen Schaufeln wie die Schiffmühlenräder. Es wird nahe am Ufer auf ein leicht wegzunehmendes Lager aufgelegt; auch die Kränze lassen sich leicht aus einander nehmen, um vor Winter alles in Sicherheit bringen zu können. Es wird in den freien Strohm eingehängt, allenfalls zu beiden Seiten in etwas divergirenden Linien strohmaufwärts schwache Pfähle eingeschlagen, um an solche Bretter anzuheften, damit das beifliesende Wasser zwischen den konvergirenden Wänden sich etwas aufstaue. Am einen Kranze, oft auch an beiden werden Kufen so angebracht, daß sie das Wasser unten im Flusse schöpfen und in einer bestimmten Höhe in einen angebrachten Kasten ausgiesen, von da es zu einem in der höchsten Linie der Wiesen angelegten Hauptgraben durch Röhren abgeleitet wird. Die Stellung der Kufen beruht auf geometrischen Betrachtungen.

---

ihm dennoch den Namen eines fränkischen Schöpfrades beilegen. Aber, fränkische Schöpfräder in Franken selbst, Bairische Schöpfräder zu nennen, ist doch in der That zu — Bairisch.

Dreizehentes Kapitel.

Roberwal's Wage.

§. 175.

Unter diesem Titel erschien, da die gegenwärtige Schrift schon unter der Presse war, eine Abhandlung von Herrn Oberschulrathe Hoffmann in Aschaffenburg (28 Seiten in 4). Diese sogenannte Wage besteht aus 4 unbeugsamen Stäben, die, an ihren Enden durch Gewerbe mit einander verbunden, ein verschiebbares Parallelogramm bilden, wie das cdib Fig. 10.

Man denke sich ein solches Parallelogramm anfänglich so gelegt, daß zwei Seiten horizontal, und zwei lothrecht liegen, so daß sowohl der obere als der untere horizontale Stab in der Mitte zwischen den beiden lothrechten von einer horizontalen Axe unterstützt wird, daß sich also das ganze Parallelogramm um diese 2 horizontale Axen drehen kann.

Dabei denke man sich noch in der Mitte eines jeden lothrechten Stabes einen wagrechten Zapfen in der Ebene des Parallelogramms befestigt, so daß beide einerlei Lage haben, z. B. beide an ihrem Stabe von der Linken gegen die Rechte hervorgehen; so hat man Roberwal's Wage, die Roberwal im Jahr 1670 den damaligen Mathematikern als etwas Geheimnißvolles vorlegte. Das Geheimnißvolle soll in folgender Erscheinung liegen:

„Man mag, in welcher Entfernung man will von „den lothrechten Seiten, an den hervorstehenden Zapfen „Gewichte anhängen, so erhalten solche einander alle„mal im Gleichgewicht, wofern sie gleich groß sind. „Dieses Gleichgewicht bleibt auch noch dann, wann „das auf beiden Axen ruhende Parallelogramm an „seinen Ecken verschoben wird, so daß obere und „untere Seite in eine schiefe Lage kommen, wobei „jedoch, wie aus der Natur der Sache erhellet, die „lothrechten Seiten nothwendig ihre lothrechte Lage „behalten.“

Der Grund dieser Erscheinung ist nun nach Herrn Hoffmanns Meinung bis jetzt noch von keinem Mathematiker mit völliger Evidenz angegeben worden, und seine Absicht bei dieser Abhandlung war daher, diese Lücke der Statik auszufüllen. Er stellt hier ausführliche Betrachtungen über die statischen Gesetze an, durch welche das gedachte Gleichgewicht bewirkt wird, und die Schrift kann Anfängern aus dem besonderen Grunde empfohlen werden, weil sie ihnen Gelegenheit zur Uebung in Anwendung statischer Lehren darbiethet.

Ich erwähne aber hier dieser Schrift als einer mir aus einem anderen Grunde merkwürdigen Erscheinung. Herrn H. scheint es nämlich zu befremden, daß unsere Lehrbücher einer so merkwürdigen Hebelverbindung beinahe durchaus keiner Erwähnung thun, noch weniger die wahren Gründe einer solchen Erscheinung entwickelten. Die individuelle Ansicht des Herrn H. dieser Wage, nach der ihm diese Hebelverbindung so merkwürdig erscheint, ist mir, ich kann es nicht bergen, merkwürdiger als die Wage selbst. Kästner, zu dessen vorzüglichen Verdiensten auch das gehört, in seinen Werken auf merkwürdige Erscheinungen und besonders auf ältere Angaben und dahin gehörige Schriften aufmerk-

sam zu machen, auch mangelhafte Theorien oder dahin gehörige Bemühungen anzuzeigen, mußte in der 1ten Abth. des II. Th. seiner mathematischen Anfangsgründe (4te Aufl. 1792) S. 40 u. 41 nothwendig an diese Roberwalsche Wage denken. Aber er gedenkt ihrer mit keiner Silbe, welches uns bei den ausgezeichneten litterärischen Kenntnissen dieses großen Mannes zum Beweise dienen kann, daß er diese Wage unter die ganz gemeinen Erscheinungen statischer Gesetze zählen mußte, wohin sie auch in der That gehört.

Ich würde ebendarum diese Wage auch hier gar nicht erwähnt haben, wenn ich in Bezug auf sie nicht noch eine andere Bemerkung zu machen hätte, daß nämlich jene Hebelverbindung so wenig räthselhaftes enthält, und so wenig gekünsteltes oder besonders scharfsinniges, daß sie längst von gemeinen Werkmeistern in Anwendung gekommen ist, die nicht einmal die bekanntesten Gesetze der Statik kannten, noch weniger jemals von Roberwal's Wage etwas gehört hatten. Ich darf nur an jene Art von Stangenkünsten erinnern, bei welchen auf Berg- und Salzwerken zwei parallele Stangenleitungen durch lothrechte (oder auch wagrechte) Schwingen, die sich in ihrer Mitte um Axen drehen, mit einander verbunden sind. Eine solche doppelte Stangenleitung besteht oft aus sehr vielen dergleichen nach einander folgenden Parallelogrammen, die während der Bewegung der Stangenkunst in ihren vier Winkelpunkten unaufhörlich verschoben werden. In manchen Schächten findet man auch dergleichen lothrechtes doppeltes Schachtgestänge, welches hin und wider durch wagrechte Schwingen verbunden ist, die sich in ihrer Mitte um eine wagrechte Axe drehen. An diesen Schachtstangen werden horizontale Stangenhaken angebracht, an welchen die Kolbenstangen eingehängt werden, und der Werkmeister findet sich schon durch den gesunden natürlichen Menschenverstand be-

kehrt. Man darf nur die VIte Kupfertafel in Karstens Lehrbegriff der ges. Math. nachsehen, und dort die beiden lothrechten Zugstangen, an welchen die Stangenhaken angebracht sind, hin und wider mit horizontalen Schwingen unter einander verbunden denken, um hierzu eine vollständige Zeichnung zu haben. Diese sehr alte schon in die Mitte des 16ten Jahrhunderts fallende Hebelverbindung ist mit Roberwal's Wage völlig einerlei, und über 100 Jahre älter als letztere. Uebrigens beruht das Ganze blos darauf, daß die nothwendig in lothrechter Stellung bleibende Zugstange von dem am Haken befindlichen Gewicht fürs erste niederwärts, dann aber auch seitwärts gedruckt wird; wenn nun die vom Seitendruck herrührenden Wirkungen durch die Verbindung mit den Schwingen aufgehoben werden, so bleiben nur noch die in gleichen Entfernungen von den Umdrehungsaxen an den Zugstangen lothrecht wirkenden Kräfte übrig, die also bei vorausgesetzter Gleichheit der angehängten Gewichte einander im Gleichgewicht erhalten müssen. Daß aber jene Seitenwirkungen, wenn die Haken oder Zapfen an den Zugstangen in der Mitte zwischen 2 Schwingen angebracht werden, einander aufheben, läßt sich aus den gleichen aber einander entgegengesetzten Wirkungen einer Zugstange an der oberen und unteren Schwinge sogleich begreifen. Wer aber in den Elementarlehren der Statik noch zu weit zurück ist, wird diese Hofmannische Schrift hinlänglich belehrend finden.

Vierzehentes Kapitel.

Nähere Bestimmungen über den Ausfluß durch Oeffnungen in etwas dicken Wänden: (s. II. Kap. §. 15).

§. 176.

Seit der Ausgabe meines Lehrbuchs der Hydraulik hofte ich vergeblich auf die Bemühungen irgend eines Hydraulikers, wodurch das Unbestimmte, was dort noch in den Benennungen von dünnen Platten und von dicken Platten zurückgeblieben war, beseitigt würde. Für Oeffnungen in dünnen Platten setzte man bis jetzt den Köefficient $\gamma = 0,62$; für Oeffnungen in dicken Platten $\gamma = 0,81$. Der bedeutende Unterschied zwischen beiden Werthen muß natürlich auf die Frage führen: welche Wanddicke kann bei einer gegebenen Oeffnung oder bei einer Oeffnung von gegebener Größe noch für dünne Platten gelten, und welche für dicke? Daß es keinen plötzlichen Abschnitt für die Gränze geben werde, unter welcher eine solche Platte als eine dünne, und über welche hinaus sie als eine dicke in die Rechnung eingeführt werden müsse, läßt sich leicht begreifen. Es werden Verhältnisse zwischen Weite der Oeffnung und Dicke der Wand statt finden, bei welchen alle zwischenliegende Werthe von γ eintreten, nämlich $\gamma = 0,63$; $\gamma = 0,64$;

$\gamma = 0,65 \ldots\ldots \gamma = 0,81$, vielleicht auch $\gamma > 0,81$ so daß über ein bestimmtes Verhältniß hinaus erst wieder $\gamma = 0,81$ wird.

Weil mir nicht bekannt geworden ist, daß irgend Jemand hierüber besondere Versuche angestellt hätte, so ließ ich mir den hierzu nöthigen Apparat verfertigen, um zu entscheidenden Resultaten zu gelangen. Wenn ich nun gleich bis jetzt noch nicht dazu gelangen konnte, mit sämmtlichen Platten Versuche anzustellen, so wird es meinen Lesern doch nicht unangenehm seyn, hier nur das Wenige mitgetheilt zu finden, was ich bis jetzt darüber mitzutheilen vermag.

§. 177.

Es wurden 2 Platten gebraucht.

Bei der Platte No. I. war in Par. Maaß

der Oeffnungsdurchmesser . . . $= 3\frac{2}{7}$ Linien.
Oeffnungsfläche $= 8,523$ Q. L. $= 0,0592$ Q. Z.
Dicke der messingenen Platte . . $= 3$ Linien.

Bei der Platte No. II.

Oeffnungsdurchmesser . . . . . $= 3\frac{1}{4}$ Linien.
Oeffnungsfläche $= 8,291$ Q. L. $= 0,0576$ Q. Z.
Dicke der Platte . . . . $= 4$ Linien.

Der Einlaßkasten war 145 Q. Zoll weit.

Jeder Zoll in der Höhe betrug also 145 Kub. Z.

Die Wasserhöhe über der Ausflußöffnung im Ausflußkasten wurde beständig auf 26 Par. Zolle erhalten.

Die Zeit wurde nach einem Sek. Pendel beobachtet. In allem wurden 12 Versuche angestellt, und die Wassertiefe jedesmal im Einlaßkasten gemessen. Die Versuche gaben folgendes:

Mit der Platte No. I.

I.	Versuch in 120 Sek.	$4\frac{1}{6}$ Zoll	604 K. Z.
II.	— — — —	$4\frac{3}{4}$ —	689 —
III.	— — — —	$5\frac{1}{6}$ —	749 —
IV.	— — — —	$5\frac{1}{3}$ —	773 —
V.	— — — —	$5\frac{11}{24}$ —	791 —
VI.	— — — —	$4\frac{9}{24}$ —	634 —
VII.	— — — —	$5\frac{1}{3}$ —	773 —
VIII.	— — — —	$5\frac{1}{3}$ —	773 —

Mit der Platte No. II.

I.	Versuch in 120 Sek.	$5\frac{2}{3}$ Zoll	822 K. Z.
II.	— — — —	$5\frac{1}{2}$ —	797 —
III.	— — — —	$5\frac{15}{24}$ —	816 —
IV.	— — — —	$5\frac{7}{12}$ —	810 —

Die theoretische Ausflußgeschwindigkeit aus dem Ausflußkasten war

$$2\sqrt{181 \cdot 26} = 137{,}2 \text{ Par. Zoll}$$

also

die theoretische Ausflußmenge
für die Platte No. I.

$$= 137{,}2 \cdot 120 \cdot 0{,}0592 = 975 \text{ K. Zoll}$$

für die Platte No. II.

$$= 137{,}2 \cdot 120 \cdot 0{,}0576 = 948 \text{ —}$$

Vergleichen wir diese mit den wirklichen Wassermengen, so erhalten wir bei der Platte No. I.

$$\text{Für den I. Versuch } \gamma = \frac{604}{975} = 0{,}620$$

$$\text{— — II. — —} = \frac{689}{975} = 0{,}706$$

$$\text{— — III. — —} = \frac{749}{975} = 0{,}768$$

Für den IV. Versuch $\gamma = \frac{773}{975} = 0,793$

— — V. — — $= \frac{791}{975} = 0,811$

— — VI. — — $= \frac{634}{975} = 0,650$

— — VII. — — $= \frac{773}{975} = 0,793$

— — VIII. — — $= \frac{773}{975} = 0,793$

Bei der Platte No. II.

Für den I. Versuch $\gamma = \frac{822}{948} = 0,865$

— — II. — — $= \frac{797}{948} = 0,841$

— — III. — — $= \frac{816}{948} = 0,861$

— — IV. — — $= \frac{810}{948} = 0,854$

§. 178.

Beim Versuch No. I. mit der ersten Platte war der Strahl beim Hervorspringen ringsherum vom äußeren Rande der Oeffnung sehr merklich abgesondert; er war dabei ohne alle Streifen, einem Kristall ähnlich, so daß sich darin gar keine Bewegung einzelner Theilchen wahrnehmen ließ. Bei den übrigen Versuchen mit dieser Platte legte sich der Strahl bald an den Rand der Oeffnung an, bald riß er sich wieder los; je seltener er sich davon losriß, desto größer war die Ausflußmenge, aber auch desto rauher und streifiger der Strahl.

Bei den Versuchen mit der 2ten Platte konnte das Auge nie eine Trennung vom Rande der Oeffnung bemerken; auch war bei diesen 4 Versuchen der Strahl rauh.

Die Resultate sind wichtig. Bei Platten, wo sich die Dicke der Platte zum Oeffnungsdurchmesser wie 3 zu $3\frac{3}{7}$ verhält, ist die Ausflußmenge noch ungewiß. Die Summe der 8 Werthe von γ ist 5,934 daher der mittlere Werth $= 0,74$, der aber von dem größten und kleinsten Werth (0,620 und 0,811) doch zusehr abweicht, als daß man ihn in ähnlichen Fällen mit einiger Sicherheit so beibehalten könnte.

Bei diesem Verhältnisse ist also die Platte noch nicht dick genug, um den gewöhnlichen Werth 0,81 für γ gebrauchen zu können; noch weniger aber ist sie dünne genug, um wie für dünne Platten $\gamma = 0,62$ setzen zu dürfen. Weil sich aber doch der Ausfluß 120 Sek. lang wie bei einer dünnen Platte verhalten hat, so wird man zur Sicherheit annehmen können, daß bei dem Verhältnisse der Wanddicke zum Durchmesser der Oeffnung wie 3 : 4 in der Ausübung $\gamma = 0,62$ gesetzt werden dürfe, also überhaupt bei dem Verhältnisse 3 : (4 + x), wo x jede bejahte Zahl, bis zu 0 bedeuten kann. Bei dem Verhältnisse 3 : 3 oder 1 : 1 kann man zur Sicherheit $\gamma = 0,74$ annehmen.

Bei Platten, wo sich die Dicke zum Durchmesser wie 4 : $3\frac{1}{4}$ verhält, ist $\gamma > 0,81$; die 4 Versuche geben zum mittleren Werth $\gamma = \frac{3,421}{4} = 0,855$, welcher vom größten und kleinsten Werthe (0,841 und 0,865) nur wenig abweicht. Man wird also zur Sicherheit in der Ausübung, bei dem Verhältnisse der Wanddicke zum Durchmesser der Oeffnung wie 4 : $3\frac{1}{4}$ oder 16 : 13, $\gamma = 0,84$ annehmen dürfen. Bei den von Bossüt angestellten Versuchen war

jenes Verhältniß wie 2 : 1 also wie $6\frac{1}{2} : 3\frac{1}{4}$, und dabei wurde $\gamma = 0,81$. Es scheint daher jenes Verhältniß $4 : 3\frac{1}{4}$ denjenigen, welches den größtmöglichen Werth von γ giebt, äußerst nahe zu liegen, und der Werth von γ sich schnell zu ändern, wenn dieses Verhältniß etwas abgeändert wird, doch schneller bei Verminderung als bei Vergrößerung der Verhältnißzahl $\frac{4}{3\frac{1}{4}}$, denn die Halbirung $\frac{2}{3\frac{1}{4}}$ giebt nur noch $\gamma = 0,62$; hingegen die Verdoppelung $\frac{8}{3\frac{1}{4}}$ noch beinahe $\gamma = 0,81$. Da übrigens schon die Verhältnißzahl $\frac{3}{3\frac{2}{7}}$ bei einem Versuche (No. V. der 1ten Platte) $\gamma = 0,81$ gab, so kann man mit Sicherheit für die Ausübung allemal schon $\gamma = 0,81$ annehmen, sobald jene Verhältnißzahl nicht mehr kleiner als $\frac{4}{5}$ ist. Nur ist es mißlich, diesen Werth von γ beizubehalten, wenn jene Verhältnißzahl über die Zahl 4 hinaus steigt.

Um in der Ausübung, wenn es auf etwas genaue Bestimmungen ankommt, auf solche rechnen zu können, bleibt es hiernach rathsam, wenn man $\gamma = 0,62$ setzen will, jene Verhältnißzahl nicht $> \frac{1}{3}$; hingegen, wenn $\gamma = 0,81$ seyn soll, dieselbe nicht < 2 aber auch nicht > 4 zu nehmen.

Uebrigens versteht es sich bei der Anwendung dieser Sätze, daß die Wandfläche oder der Rand, welcher die Einflußöffnung (d. h. die innere Mündung der Ausflußöffnung) umgiebt, vielmal größer als die Oeffnung seyn müsse. Wird eine Röhre, durch die Wand eines Behältnisses ganz durchgesteckt, so daß sie mit ihrem Ende noch isolirt ins Wasser eingreift; oder wird sie nicht durch die ganze Wand-

dicke des Behältnisses durchgesteckt, und bildet in diesen Fällen der Rand, d. h. die um die Oeffnung herum liegende ringförmige Fläche der Röhrenwand, nicht eine vielmal größere Fläche, als die der Oeffnung ist, so kann γ bis zu 0,95 steigen, wenn dabei jene Verhältnißzahl $= \frac{16}{13}$ genommen wird. Hiernach hat man also seine Maaßregeln zu nehmen, wenn es darauf ankommt, die größtmögliche Abflußmenge zu bewirken.

Fünfzehentes Kapitel.

Von Reichenbachs Verbesserungen der Dampfmaschinen.

Der Anlegung von Dampfmaschinen zu Betreibung von Fabriken und Gewerben standen bisher hauptsächlich drei wichtige Hindernisse im Wege: Ihre Unbehülflichkeit, Kostspieligkeit und Zusammengesetztheit.

Eine Dampfmaschine, welche beträchtliche Kraft hervorbringen sollte, erforderte bisher einen Dampf-Cylinder von mehreren Fussen im Durchmesser und in der Höhe, nahm einen bedeutenden Raum in einem Gebäude ein, erforderte sehr große Anlags- und stete Unterhaltungskosten, verzehrte außerordentlich viel Brennmaterial, und brauchte einen eigenen Maschinenmeister.

Der hiesige königl. Salinenrath Ritter von Reichenbach (schon allgemein als einer der ersten Mechaniker unserer Zeit anerkannt) hatte daher schon seit mehreren Jahren die Idee gefaßt, jenen Mängeln abzuhelfen, und dadurch die Anwendung der so wichtigen und nützlichen englischen Erfindung allgemeiner zu machen.

Sein Plan war im Wesentlichen darauf gerichtet, die Dampfmaschine nicht nur zu allen Verrichtungen in Fabri-

ken, Manufakturen, Werkstätten, Berghütten- und Hammerwerken, Salinen ꝛc., wo bisher schon Maschinen durch die Kräfte von Menschen, von Gewichten, oder Feuer, Wasser und Wind in Bewegung gesetzt waren, sondern selbst für das gemeine Leben, namentlich in der Oekonomie und bei dem Fuhrwesen, und zwar nicht etwa auf eisernen und hölzernen Kunstbahnen, sondern sogar auf den gewöhnlichen Heerstrassen, bergauf und bergab anwendbar zu machen. Zu diesem Ende hatte er die schwierige und neue Aufgabe zu lösen: Die Dampfmaschine d. i. Dampfkessel und Dampf-Cylinder

a) in den möglichst kleinen Raum unbeschadet ihrer Wirksamkeit zu bringen,

b) dieselbe trag und fahrbar zu machen,

c) ihr eine so einfache Einrichtung zu geben, daß sie von jedem gemeinen Arbeiter verstanden, behandelt und im Gange erhalten, endlich

d) daß sie ohne bedeutende Kosten angeschaft, und mit geringem Aufwande von Brennmaterial in Bewegung gesetzt, und darinn erhalten werden könne.

Sollte eine Dampfmaschine diesen Erfordernissen genügen; so müßte dem Dampfkessel eine besondere Einrichtung und Form gegeben werden, welche es unmöglich machte, während er selbst z. B. auf einem Fuhrwerke dem heftigsten Rütteln und Stossen ausgesetzt wäre, das Kochen des Wassers zu stören, oder dem Dampfcylinder Wasser, statt der Dämpfe zuzuführen, so mußte mit Ausschluß von allem kalten Wasser, die Verdichtung der Dämpfe (Condensation) hinwegfallen, so mußte der Steuerung d. i. der bisher so künstlichen Vorrichtung zum Einlassen und Verschliesen der Dämpfe die gröste Einfachheit gegeben werden, so mußte selbst keine besondere Vorrichtung mehr nöthig seyn, um die

Stempelstange in der Richtung der Achse des Dampfcylinders auf und ab zu bewegen, so mußte der Dampfkessel selbst sicher genug gebaut werden können, um alle Gefahr des Zerspringens zu entfernen, und seine einfache Füllung durch eine eigene einfache Weise zu erhalten. Herr von Reichenbach hat diese Schwierigkeiten mit seltenem Glücke nach dem ihm eigenen Scharfsinn gelößt. Seine Dampfkessel mit dem Dampfcylinder sind tragbar, und dennoch wirkt nach der vorläufig angestellten Berechnung sein kleiner Dampfcylinder von 16 Zoll Höhe und 2 Zoll Weite so viel als 2 Pferde im Zuge vermögen. Der Stempel schließt durch eine eigene Vorrichtung mit immer gleichem Drucke an, die Stempelstange geht ohne alle äußere Hülfe genau in der Richtung der Cylinderaxe, die Steurung ist im höchsten Grade einfach, und nicht minder ist es die Vorrichtung zu beständiger Füllung des Dampfkessels. Dieser letztere hat übrigens eine ganz besondere und neue Form. Auch das heftigste Schütteln stört das Kochen des Wassers nicht, und gestattet dem Wasser keinen Zugang zu der Mündung der Dampfröhre. Er ist mit Sicherheits-Ventilen versehen, und das Zerplatzen ist unmöglich, indem er, wenn wider Vermuthen die Vorrichtung jedes Auslassen der Dämpfe und selbst das Sicherheits-Ventil ihre Dienste versagen sollte, sich endlich selbst öffnet, und das Feuer zerstört.

Wesentlich davon sind folgende beide Punkte, daß keine Condensation der Dämpfe statt findet, und der Dampfcylinder durch die Steurung nicht ganz, sondern nur zum Theil mit Dampf angefüllt wird. Diese beiden letzten Einrichtungen sind nicht neu, allein! und höchstwichtig ist die Idee und Ausführung der Maschine im Ganzen, nach ihrer jetzigen völlig veränderten Gestalt. Es ist eine Erfindung, welche eine Epoche in der Geschichte der Dampfmaschinen

herbeiführen, und der Stolz unsers Vaterlandes zu werden verspricht.

Bereits steht die Maschine zur ersten Probe aufgerichtet, und bald hoft der polytechnische Verein so glücklich zu seyn, den Lesern des Anzeigers die Resultate davon anzeigen zu können.

Der Herr Salinenrath von Reichenbach hat bereits am 19ten Januar d. J. dreien sachkundigen Freunden den Herrn Akademikern und Salinen-Administrator von Flurl, Oberfinanzrath von Yelin und Kanonikus und geistlicher Rath von Imhof die Theorie seiner Erfindung in einem vertrauten Zirkel umständlich entwickelt, seine Maschine nach ihrer ganzen Einrichtung vorgezeigt, und darauf eine umständliche Beschreibung derselben mit einer Zeichnung, versehen mit den Unterschriften und Siegeln jener drei genannten Herrn Akademiker bei der königl. Akademie der Wissenschaften hinterlegt, um sich bis zur Bekanntmachung des ersten Resultats gegen Jedermann die Priorität seiner wichtigen und kostspieligen Erfindung zu sichern.

Der Einsender bemerkt noch, daß die Ausführung selbst, zugleich auf einem interessanten physikalischen Satze beruht, welcher als neu dadurch zugleich erwiesen werden muß *).

---

*) Man findet die vorstehende Anzeige im Wöchentlichen Anzeiger für Kunst- und Gewerbfleiß im Königreich Baiern 1816. No. 8. Es wird wohl keiner Entschuldigung bedürfen, daß ich dieser Anzeige hier ein eigenes Kapitel widme. Der Gegenstand der Erfindung ist für ganz Europa von der größten Wichtigkeit, und der Namen des Erfinders verbürgt uns die vollkommene Erreichung der hiermit bezielten mannichfaltigen Zwecke. Die Möglichkeit des Erfolgs wird sich aus nachstehendem beiläufigen Ueberschlag begreifen lassen. Wir wollen die Weite des Cylinders nur zu 8 Q. Zoll

= 1/48 rhl. Q. Fuß annehmen, so ist der Druck der Atmosphäre auf diese Fläche = 32 . 1/48 = 2/3 K. F. Wasser = 44 Berl. Pfund. Werden also die Dämpfe bis zur 3fachen Expansivkraft erhitzt, so wirken sie noch mit einem Ueberschuß von 2 . 44 Pfund = 88 Pfund. Wirkt diese Kraft an einem Hebelarm, der 6mal so lang ist, als der, durch welchen der Wagen fortgeschoben wird, so hat man für den Lastpunkt eine Kraft = 6 . 88 = 528 Pfund. Setzen wir die mit dem Widerstande des Fuhrwerks im Gleichgewicht stehende Kraft = 228 Pfund, so bleibt noch Ueberwucht 300 Pfund.

Hieraus entsteht eine beschleunigende Kraft $f = \frac{300}{K}$, wenn K die in Bewegung zu setzende Masse ist. Setzen wir K = 3000 Pfund, so wird f = 0,1. Ist nun die Einrichtung so gemacht, daß die Bewegung des Fuhrwerks nie unterbrochen wird, oder eine einmal erlangte Geschwindigkeit nicht wieder verlohren geht, so wird allemal innerhalb einer gewissen Zeit t, vom ersten Anlassen der Maschine angerechnet, eine verlangte Geschwindigkeit C erlangt werden, so daß $t = \frac{C}{2 . 0,1 . 15,6} = \frac{C}{3,12} = 0,32 . C$ wird. Soll z. B. C = 5′ seyn (welches die Geschwindigkeit eines Lastwagens noch übertrift), so hätte man beiläufig t = 3 Sekunden. Aber auf diese ersten Sekunden, deren auch Pferde bedürfen, um in vollen Zug zu kommen, kommt es hier gar nicht an; genug, daß nach wenigen Sekunden der Wagen die Geschwindigkeit von 3′ erlangt. Der Kolben bewegt sich dann mit der sechsfachen Geschwindigkeit = 18′ = 216″, müßte also, wenn sein Hub, 1′ betrüge 9mal in einer Sekunde auf und nieder gehen, und es müßten von Sekunde zu Sekunde 216 . 3 = 648 K. Zoll Dämpfe erzeugt werden, keinesweges aber Dämpfe, deren Expansivkraft 3mal so groß als die der atmosphärischen Luft wäre, weil im eingetretenen Beharrungsstande außer der zur Ueberwindung des atmosphärischen Drucks und des Widerstandes des Fuhrwerks erforderlichen Kraft keine Ueberwucht nöthig ist. Die zum Gleichgewicht mit dem Widerstande des Fuhrwerks erfor-

derliche Kraft ist am Kraftpunkte = 1/6 . 228 = 38 Pf. = 0,38 Kub. F. Wasser; die Dämpfe müssen also gegen die 3 Q. Zoll große Grundfläche des Kolbens als eine Wassersäule von der Höhe $\frac{0,38}{1/48}$ = beinahe 28′ drucken, welches 7/8 des atmosphärischen Drucks wäre, demnach wäre die erforderliche Expansivkraft der Dämpfe im Beharrungsstande 1 7/8 so groß als die der atmosphärischen Luft. Daß nun von Sekunde zu Sekunde 648 K. Zoll solcher Dämpfe erzeugt werden können, ist keinem Zweifel unterworfen, da manche große Dampfmaschine 15 K. F. Dämpfe in jeder Sekunde erzeugt, deren Federkraft die der äußeren Luft noch um 1/7 übersteigt. Uebrigens habe ich hier nur die Möglichkeit des Effekts darlegen wollen, die dann durch den dem Scharfsinne dieses großen Künstlers vorbehaltenen eigenen Mechanismus nicht aufgehoben werden kann. Uebrigens vermuthe ich, daß der am Schlusse obiger Ankündigung bemerkte neue physikalische Lehrsatz die Schnelligkeit der Dampferzeugung betrift, die ich aber längst schon gegen die Meinung anderer Physiker behauptet habe. Wäre also dieses wirklich der angedeutete Satz, so wäre er nicht mehr neu.

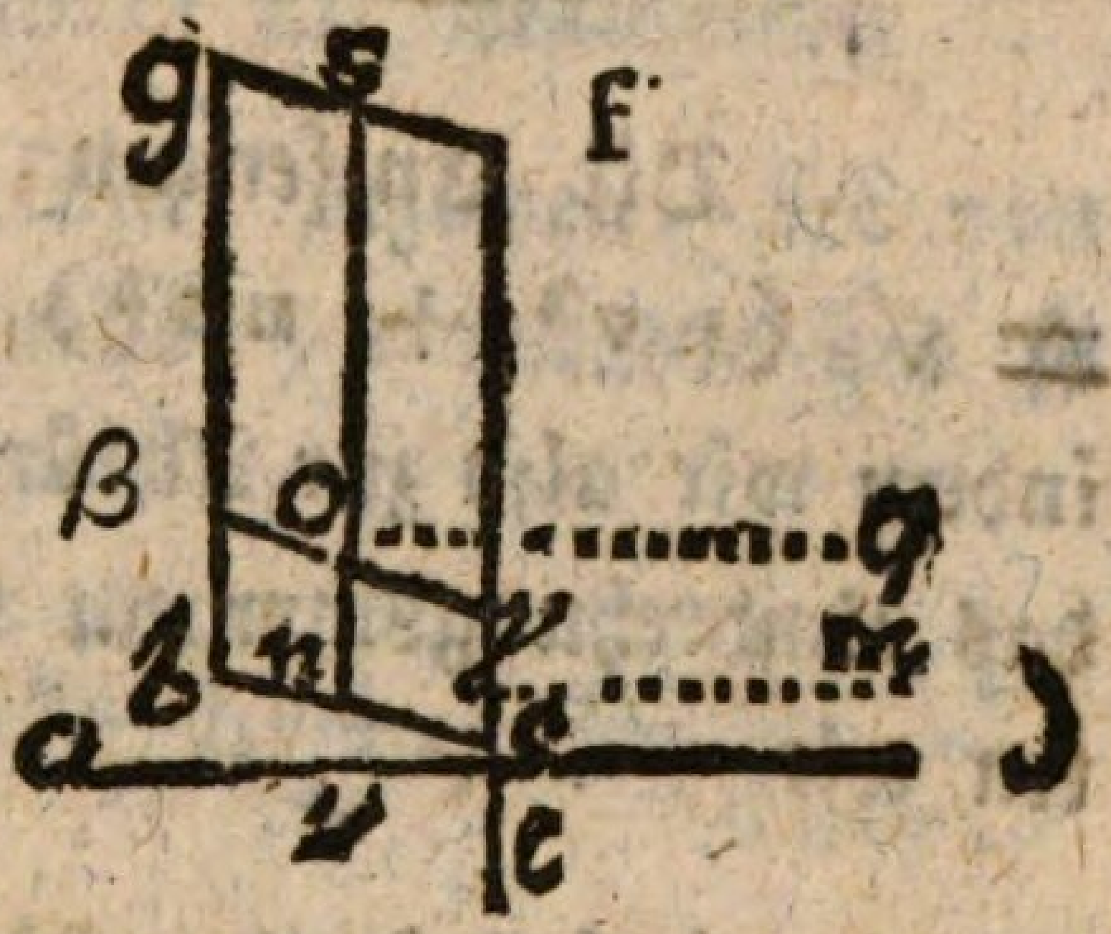
Die große Revolution, welche die glückliche Ausführung und Anwendung dieser Maschine in Bezug auf das Fuhrwesen bewirken müßte, ist leicht vorauszusehen. Der Aufwand von Brennmaterial kann dem allgemeineren Gebrauch nicht im Wege stehen; überhaupt bleibt dabei in Bezug auf Brennmaterialien durchaus nichts zu fürchten. Gegenden, wohin jetzt wegen des kostbaren Transports keine Steinkohlen verführt werden können, werden sich dann reichlich damit versorgt sehen, indem ein Cylinder von 3″ im Durchmesser schon mehr als 4 Pferde beiführen, und der Kohlenaufwand für diese Maschine täglich nicht soviel als die tägliche Unterhaltung eines Pferdes kosten würde. Die Ersparung des Futters für viele tausend Pferde giebt neue Plätze zu andern Anpflanzungen u. s. f. Kurz, diese Reichenbachsche Erfindung kann, wenn sie der Ankündigung entspricht, Folgen haben, die alle Berechnung übersteigen.

Sechzehentes Kapitel.

Ueber die Wirkung des Windstosses bei Windmühlenflügeln.

§. 1. Man denke sich Fig. 16. als eine horizontale Axe, fe als einen in ihr lothrecht befestigten Stab, und cbfg als einen an diesem Stabe befestigten ebenen rektangelförmigen Flügel, dessen horizontale Seite cb mit der Axe da den Winkel bca = α mache. Man hat sich also bca als Winkel in einer horizontalen Ebene zu denken. Parallel mit da stößt der Wind gegen den Flügel; man soll das statische Moment bestimmen, mit welchem der Wind den in Ruhe erhaltenen Flügel um die Axe da zu drehen strebt.

Fig. 16.



Aufl. 1. Die lothrechte ns theile den Flügel in zwei Hälften, o ein willkührlich angenommener Punkt in ns, und βoγ der cb gleichlaufend; qo, mn als Richtungen des Windes der da gleichlaufend; cb denke man sich wie

$\gamma\beta$ als einen sehr schmalen Streifen des Flügels; seine Breite $= \beta$, seine Länge $cb = \gamma\beta = l$; seine Fläche $l\beta = w$; nv sey auf ca senkrecht; die Größe des Drucks, welche aus Windstosse auf solche Streifen, in n und o vereint angenommen, parallel mit nv entsteht, sey S, so ist sowohl für $\gamma\beta$ als für cb, wenn C die Geschwindigkeit des Windes ist,

$$1. \; S = \frac{C^2}{4g} . \text{Sin.} \, \alpha^2 . \text{Cos.} \, \alpha . w$$

in Bezug auf das Gewicht einer Luftmasse von diesem kub. Inhalt.

2. Die willkührlich abgeschnittene no sey $= x$, und Fläche $bo\gamma\beta = W$, so wird

$$dS = \frac{C^2 . \text{Sin.} \, \alpha^2 . \text{Cos.} \, \alpha}{4g} . l . dx$$

3. Die Entfernung der Stelle o von der Axe da ist $= \surd (nv^2 + no^2) = \surd ((\frac{1}{2} l . \text{Sin.} \, \alpha)^2 + x^2)$; indem wir also zur Abkürzung $\frac{1}{2} l . \text{Sin.} \, \alpha = \iota$ setzen, und das Umdrehungsmoment von dS mit dU bezeichnen, erhalten wir

$$dU = (\surd (\iota^2 + x^2)) . \frac{C^2 . \text{Sin.} \, \alpha^2 . \text{Cos.} \, \alpha}{4g} . l . dx$$

wo U das Umdrehungsmoment des Flächenstücks $cb\beta\gamma$ ist.

4. In der Ausübung reicht die Flügelfläche nie bis in cb herab, und es bleibt allemal der kleinste Werth von x, von der Axe d. h. von c aus auf der Ruthe cf bis zum Anfange des Flügels gemessen, wenigstens $= \iota$; wir können daher ohne Bedenken $x + \frac{\iota^2}{2x + \iota}$ statt $\surd (\iota^2 + x^2)$ schreiben, da es hier doch hauptsächlich auf Werthe von x ankommt, die vielmal größer als ι sind.

Also

$$dU = \frac{C^2 . \text{Sin.} \alpha^2 . \text{Cos.} \alpha . 1}{4g} . xdx + \frac{\varepsilon^2 dx}{2x + \varepsilon}$$

und

$$U = \frac{C^2 . \text{Sin.} \alpha^2 . \text{Cos.} \alpha . 1}{8g} . \left(x^2 + \varepsilon^2 . \text{logn.} (x + \tfrac{1}{2}\varepsilon)\right) + \text{Const.}$$

Für $x = o$ muß U verschwinden, also

$$U = \frac{C^2 . \text{Sin.} \alpha^2 . \text{Cos.} \alpha . 1}{8g} . \left(x^2 + \varepsilon^2 . \text{ln.} \frac{2x + \varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

5. Ist $cf = \lambda$, so erhält man für diese Flügellänge

$$U = \frac{C^2 . \text{Sin.} \alpha^2 . \text{Cos.} \alpha . 1}{8g} . \left(\lambda^2 + \varepsilon^2 . \text{ln.} \frac{2\lambda + \varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

in Bezug auf einen Flügel, der bis in cb herabreicht.

Soll sich also U auf einen Flügel beziehen, der von fg nur bis zu einer bestimmten Stelle $\gamma\beta$ herabreicht, so daß $c\gamma = h$ wäre, so wird allgemein

$$\text{II. } U = \frac{C^2 . \text{Sin.} \alpha^2 . \text{Cos.} \alpha . 1}{8g} . \left(\lambda^2 - h^2 + \varepsilon^2 . \text{ln.} \frac{2\lambda + \varepsilon}{2h + \varepsilon}\right)$$

6. Dieses statische Moment wird in Bezug auf die Veränderlichkeit von α ein Maximum, wenn $\text{Sin.} \alpha^2 . \text{Cos.} \alpha$ oder $\text{Cos.} \alpha - \text{Cos.} \alpha^3 = \text{max.}$ wird. Für diesen Fall ist aber

$$1 - 3 . \text{Cos.} \alpha^2 = 0$$

also $\text{Cos.} \alpha = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = 0{,}57735$

und $\alpha = 54° \; 44'$

7. Hiernach ist also das größte statische Moment des Flügels, so lange er sich noch in Ruhe befindet,

$$U_{(m)} = \frac{0{,}3848 . C^2 . 1}{4g} . \left(\lambda^2 - h^2 + \varepsilon^2 . \text{ln.} \frac{2\lambda + \varepsilon}{2h + \varepsilon}\right)$$

In der Ausübung fehlt das untere Flügelstück bis zu einer gewissen Höhe h, die gewöhnlich zwischen 3 und 5 Fusse fällt. Die ganze Breite der Flügel oder l fällt gewöhnlich zwischen 5 und 7 Fuß. Auch bei sehr kleinen Windmühlen ist nicht leicht $\lambda < 24'$. Bei solchen Verhältnissen der hier vorkommenden Größen kann man immer noch mit hinlänglicher Genauigkeit

$$U^{(m)} = \frac{0{,}3848 \cdot C^2 \cdot l}{4g} \cdot \lambda^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{in Bezug auf} \\ \text{K. Fusse Luft} \end{array} \right.$$

setzen, oder, indem wir das spec. Gewicht der Luft $= \frac{1}{850}$ von dem des Wassers annehmen, für 4 Flügel.

$$\text{III. } U^{(m)} = 0{,}0009 \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot \lambda^2 l \text{ in Bezug auf K. F. Wasser}$$

Man sieht, daß $U^{(m)}$ das Maximum von U bezeichnen soll.

§. 2. Die vorstehenden Rechnungen setzen voraus, daß die Flügel im Stande der Ruhe erhalten werden. Ist also der auf die Entfernung R von der Axe reducirte gesammte Widerstand $= Q$, so hat man für 4 Flügel

$$R \cdot Q = 0{,}0009 \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot \lambda^2 l$$

und

$$\text{IV. } Q = \frac{0{,}0009 \cdot C^2 \lambda^2 l}{4Rg}$$

in Bezug auf K. F. Wasser.

§. 3. Bei wirklicher Bewegung der Flügel erhält man nothwendig ein geringeres statisches Moment, weil jetzt die Stoßfläche dem anstossenden Luftstrohme mit einer gewissen Geschwindigkeit ausweicht.

Ist nämlich die Umlaufsgeschwindigkeit der Stelle $s = c$, wozu an der Ruthe die Entfernung $cf = \lambda$ gehört, so

gehört zu jeder anderen Stelle o in ns, die der Entfernung $c\gamma = x$ an der Ruthe zugehört, sehr nahe die Geschwindigkeit $\frac{x}{\lambda} \cdot c$, und in dieser Stelle o weicht der Flügel dem Luftstrohme mit einer Geschwindigkeit $\frac{x}{\lambda} \cdot c \cdot \text{Cot.}\, \alpha$ nach der Richtung des Windes aus. Man muß daher in dem Werthe von dU (§. 1. No. 4.) $C^2 - \frac{x^2}{\lambda^2} \cdot c^2 \cdot \text{Cot.}\, \alpha^2$ statt C^2 schreiben *). Dieses giebt

---

*) Dieses gilt für einen unbegränzten Luftstrohm. Die Formel ist für die Ausübung hinlänglich genau 1) weil der Luftstrohm leicht zur Seite ausweichen kann, wann ihm eine Fläche entgegengesetzt wird; 2) weil das Abgleiten nach der Seite durch die schnelle Umlaufsbewegung der Flügel sehr befördert wird; 3) weil die Korrektion, die beim Stoße unbegränzten Wassers zur Vergrösserung des Werths für die Wirkung des Stoßes nöthig wäre, bei dergleichen seitwärts ausweichenden Stoßflächen selbst bei kleinen Werthen von α sehr viel geringer wird, als bei den Bossütschen Versuchen, wo keine solche Seitenausweichung statt fand; bei grösseren Werthen von α aber jene Korrektion immer unbedeutender wird; hier aber α nie kleiner als 54° 44′ werden kann. Beim senkrechten Stoße gegen eine Fläche W, die mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{C}$ nach der Richtung des unbegränzten Wassers ausweicht, setzen andere Schriftsteller sehr unrichtig die Größe des Stoßes $= \frac{(C - \mathfrak{C})^2}{4g} \cdot$ W statt $\frac{C^2 - \mathfrak{C}^2}{4g}$. W. Die Erfahrung widerlegt sie hinlänglich. S. m. Einleitung in das Studium der Elementargeometrie, Algebra, Trig. höh. Geom. und Dynamik. S. 172.

$$dU = \frac{\mathrm{Sin.}\,\alpha^2.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha\,.\,l}{4g}.\left(C^2.\,x\,dx + \frac{\epsilon^2\,dx}{2x+\epsilon} - \frac{c^2.\,\mathrm{Cot.}\,\alpha^2}{\lambda^2}.\left(x^3\,dx + \frac{\epsilon^2 x^2\,dx}{2x+\epsilon}\right)\right)$$

und

$$U = \frac{\mathrm{Sin.}\,\alpha^2.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha\,.\,l}{4g}.\left(\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\epsilon^2.\,\mathrm{logn.}\,(x+\tfrac{1}{2}\epsilon)\right).C^2 - \frac{c^2.\,\mathrm{Cot.}\,\alpha^2}{\lambda^2}.\left(\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}\epsilon^2.\int\frac{x^2\,dx}{x+\tfrac{1}{2}\epsilon}\right)\right)$$

Setzt man $x + \frac{1}{2}\epsilon = z$, so wird

$$\int\frac{x^2\,dx}{x+\tfrac{1}{2}\epsilon} = \int\frac{(z^2 - \epsilon z + \tfrac{1}{4}\epsilon^2).\,dz}{z}$$

$$= \tfrac{1}{2}z^2 - \epsilon z + \tfrac{1}{4}\epsilon^2.\,\mathrm{logn.}\,z$$

$$= \frac{(x+\tfrac{1}{2}\epsilon)^2}{2} - \epsilon(x+\tfrac{1}{2}\epsilon) + \tfrac{1}{4}\epsilon^2.\,\mathrm{ln.}\,(x+\tfrac{1}{2}\epsilon)$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\epsilon x + \left(\tfrac{1}{4}\,\mathrm{logn.}\,(x+\tfrac{1}{2}\epsilon) - \tfrac{3}{8}\right).\,\epsilon^2$$

Daher $U =$

$$\frac{\mathrm{Sin.}\,\alpha^2.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha\,.\,l}{8g}.\left(\left(x^2 + \epsilon^2.\,\mathrm{logn.}\,(x+\tfrac{1}{2}\epsilon)\right).C^2 - \frac{c^2.\,\mathrm{Cot.}\,\alpha^2}{\lambda^2}.\left(\tfrac{1}{2}x^4 + \epsilon^2.\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\epsilon x\right)\right)\right) + \mathrm{Const.}$$

weil das 3te Glied im vorhergehenden Ausdruck wegbleiben kann.

Für einen Flügel, der in der Axe anfängt, muß U für $x = o$ verschwinden, also

$$U = \frac{\mathrm{Sin.}\,\alpha^2.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha\,.\,l}{8g}.\left(\left(x^2 + \epsilon^2.\,\mathrm{logn.}\,\frac{2x+\epsilon}{\epsilon}\right).C^2 - \frac{c^2.\,\mathrm{Cot.}\,\alpha^2}{2\lambda^2}.\left(x^4 + \epsilon^2\,(x^2 - \epsilon x)\right)\right)$$

und für die ganze Länge $\lambda = cf$

$$U = \frac{\text{Sin.}\,\alpha^2.\,\text{Cos.}\,\alpha.\,l}{8g}.\left(\left(\lambda^2 + \varepsilon^2.\,\text{logn.}\,\frac{2\lambda+\varepsilon}{\varepsilon}\right).\,C^2 - \frac{c^2.\,\text{Cot.}\,\alpha^2}{2\lambda^2}.\left(\lambda^4 + \varepsilon^2.\,(\lambda^2 - \varepsilon\lambda)\right)\right)$$

Für einen Flügel $\gamma\beta g f$, der erst in der Höhe $e\gamma = h$ anfängt, wird allgemein

$$\text{V.}\ U = \frac{\text{Sin.}\,\alpha^2.\,\text{Cos.}\,\alpha.\,l}{8g}.\left(\left(\lambda^2 - h^2 + \varepsilon^2.\,\text{ln.}\,\frac{2\lambda+\varepsilon}{2h+\varepsilon}\right).\,C^2 - \frac{c^2.\,\text{Cot.}\,\alpha^2}{2\lambda^2}.\left(\lambda^4 - h^4 + \varepsilon^2.\,(\lambda^2 - h^2 - \varepsilon.\,(\lambda - h))\right)\right)$$

Nach den in der Ausübung eintretenden Verhältnissen der hier vorkommenden Bestimmungsstücke erhält man aber auch noch hinlängliche Genauigkeit durch die nachstehende Formel für einen Flügel

$$U = \frac{\text{Sin.}\,\alpha^2.\,\text{Cos.}\,\alpha.\,l}{8g}.\left(C^2 - \frac{c^2\ \text{Cot.}\,\alpha^2}{2}\right).\,\lambda^2$$

und für n Flügel

$$\text{VI.}\ \ U = \frac{n.\,\text{Sin.}\,\alpha^2.\,\text{Cos.}\,\alpha.\,l.\,\lambda^2}{8g}.\left(C^2 - \frac{c^2.\,\text{Cot.}\,\alpha^2}{2}\right)$$

In Bezug auf die Veränderlichkeit von α erhält man für das Maximum von U

$$\text{Cos.}\,\alpha = \sqrt{\frac{2C^2}{6C^2. + 3c^2}}$$

oder, wenn man $c = \phi.\,C$ setzt

$$\text{VII.}\ \ \text{Cos.}\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{6 + 3\phi}}$$

§. 4. Man muß sich erinneren, daß c also der Werth von ϕ sich auf die Stelle ε bezieht, die zur Ruthenlänge $cf = \lambda$ gehört. Es ist also jetzt noch die Frage, wie groß man ϕ nehmen müsse?

Man hat $\text{Cos.}\ \alpha^2 = \frac{2}{6 + 3\phi}$, also $\text{Sin.}\ \alpha^2 = 1 - \frac{2}{6 + 3\phi} = \frac{4 + 3\phi}{6 + 3\phi}$ und $\text{Cot.}\ \alpha^2 = \frac{2}{4 + 3\phi}$; daher aus (VI)

$$U(m) = \frac{n.\ (4 + 3\phi)\ (\sqrt{2}).\ 1.\ \lambda^2}{8.\ (6 + 3\phi).\ g\sqrt{(6 + 3\phi)}} \cdot \left(C^2 - \frac{\phi^2\ C^2.\ 4}{2.\ (4 + 3\phi)}\right)$$

$$= \frac{n.\ (4 + 3\phi).\ 0,177.\ \lambda^2 1}{(6 + 3\phi).\ g.\ \sqrt{(6 + 3\phi)}} \cdot \frac{4 + 3\phi - 2\phi^2}{4 + 3\phi} \cdot C^2$$

oder

$$\text{VIII.}\quad U(m) = \frac{0,177.\ n.\ (4 + 3\phi - 2\phi^2).\ \lambda^2.\ 1}{(6 + 3\phi).\ \sqrt{(6 + 3\phi)}} \cdot \frac{C^2}{g}$$

Ist Q die auf die Entfernung R von der Axe reducirte gesammte Last, so hat man für die gleichförmige Bewegung

$$R.\ Q = \frac{0,177.\ n.\ (4 + 3\phi - 2\phi^2).\ \lambda^2 1}{(6 + 3\phi).\ \sqrt{(6 + 3\phi)}} \cdot \frac{C^2}{g}$$

und

$$\text{IX.}\quad Q = \frac{0,177.\ n.\ (4 + 3\phi - 2\phi^2).\ \lambda^2 1}{R.\ (6 + 3\phi).\ \sqrt{(6 + 3\phi)}} \cdot \frac{C^2}{g}$$

Druckt man die Nutzlast durch Q' aus, so läßt sich Q in 3 Theile zerlegen. Ein Theil der Reibung läßt sich der Q' als beiläufig proportional annehmen, und durch δ. Q ausdrucken; den übrigen Theil der Reibung, welcher von Q' unabhängig ist, wollen wir, allemal in Bezug auf die Entfernung R, $= q$ setzen, so wird $Q = (1 + \delta).\ Q' + q$, und $Q' = \frac{Q - q}{1 + \delta}$, also aus (IX)

$$\text{X.}\quad Q' = \frac{0,177.\ n.\ (4 + 3\phi - 2\phi^2).\ \lambda^2 1}{(1 + \delta).\ R.\ (6 + 3\phi).\ \sqrt{(6 + 3\phi)}} \cdot \frac{C^2}{g} - \frac{q}{1 + \delta}$$

Die Geschwindigkeit in der Entfernung R ist $\frac{R.\ c}{\sqrt{(s^2 + \lambda^2)}}$

$= \frac{R \cdot \phi C}{\sqrt{(\iota^2 + \lambda^2)}}$. Bezeichnen wir also den Nutzeffekt mit E, so wird

$$E = \frac{R \cdot \phi C}{\sqrt{(\iota^2 + \lambda^2)}} \cdot Q$$

oder

$$\text{XI. } E = \frac{\phi C}{\sqrt{(\iota^2 + \lambda^2}} \left(\frac{0,177 \cdot n \cdot (4 + 3\phi - 2\phi^2) \cdot \lambda^2 \cdot l}{(1 + \delta) \cdot (6 + 3\phi) \cdot \sqrt{(6 + 3\phi)}} \cdot \frac{C^2}{g} - \frac{q R}{1 + \delta} \right)$$

Um also den größtmöglichen Nutzeffekt zu erhalten, müßte man ϕ so nehmen, daß dieser Werth von E ein Maximum würde. Aus diesem Werthe von ϕ gäbe sich dann auch noch (VII) der vortheilhafteste Werth von α. Der Umstand, daß ι selbst von α also auch von ϕ abhängt, ist unbedeutend, weil überhaupt $\sqrt{(\iota^2 + \lambda^2)}$ nur sehr wenig von λ verschieden ist. Man kann für die Ausübung ein-für allemal $\iota^2 = 6$ setzen.

Ich halte es aber überhaupt nicht der Mühe werth, diese Berechnung auszuführen, weil für jeden anderen Wind wieder ein anderer Werth von α herauskommen würde.

Ich setze daher die folgende Regel fest:

> Man nehme α so, daß für $x = 32'$ die Geschwindigkeit $c = C$ werden könne, also $\phi = 1$.

Hiernach erhält man aus (IX)

$$Q = \frac{0,177 \cdot n \cdot 5 \cdot \lambda^2 \cdot l}{27 \cdot R} \cdot \frac{C^2}{g}$$

oder

$$\text{XII. } Q = 0{,}0328 \frac{n\, C^2\, \lambda^2 l}{R \cdot g}$$

in Bezug auf K. F. Luft

also

$$\text{XIII. } Q = \frac{0{,}0328}{850} \cdot \frac{n\, C^2\, \lambda^2 l}{R \cdot g} = 0{,}0000386 \cdot \frac{n \cdot C^2\, \lambda^2 l}{R\, g}$$

in Bezug auf K. F. Wasser.

Es sey z. B. $C = 30'$, $\lambda = 46'$, $l = 5{,}5'$; $R = 1{,}5'$ alles in Par. Fuß, also $g = 15{,}1$; so wird für 4 Flügel

$$Q = 4 \cdot 17{,}85 = 71{,}4 \text{ K. F. W.}$$

Die Stelle, welchem die Umlaufsgeschwindigkeit $c = C = 30'$ zukommt, ist $\sqrt{(6 + 32^2)} = 32{,}1'$ von der Axe entfernt, also ihre Kreisbahn $= 201{,}6'$, daher ihre Umlaufszeit $= \frac{201{,}6}{30} = 6{,}72$ Sekunden und in 1 Minute erfolgen $\frac{60}{6{,}72}$ oder sehr nahe 9 Umgänge.

Setzt man also die Anzahl Umgänge in 1 Minute allgemein $= N$, so hat man für die Last Q (XIII) allemal

$$\text{XIV. } N = \frac{C}{30} \cdot 9 = 0{,}3 \cdot C$$

Dabei wird, weil hier $\phi = 1$ ist, nach VII

$$\text{Cos. } \alpha = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}47140$$

also

$$\alpha = 61^\circ\ 52'$$

Weil aber die Flügel durch den Windstoß selbst etwas zurückgebogen werden, so nehme man dafür

$$\text{XV. } \alpha = 63^\circ$$

Auf solche Weise erhält man also für $c = C$ (wo sich c auf $x = 32{,}1'$ bezieht) oder für $N = 0{,}3 \cdot C$ allemal das

größtmögliche statische Moment der Flügel, welches bei dieser Umlaufsgeschwindigkeit durch die vortheilhafteste Neigung ($\alpha = 63°$) erhalten werden kann.

§. 5. Viel mehr läßt sich auch durch keine andere Einrichtung gewinnen. Inzwischen ist bei den bisher betrachteten ebenen Flügeln der Erfolg unvermeidlich, daß die oberen Windsprossen dem Winde schneller ausweichen, als die unteren (der Axe näher liegenden), daß also auch der Druck auf die oberen nothwendig schwächer ist, als auf die unteren. Man hat daher gewundene oder sogenannte windschiefe Flügel eingeführt, bei welchen der Neigungswinkel gegen die Axe von unten nach oben immer größer wird. Ist er nämlich in der Höhe λ (d. h. in der Entfernung λ von der Axe an der Ruthe gemessen) $= \alpha$, und in der unbestimmten Höhe $x = \zeta$, so weichen alle Sprossen dem Winde mit gleicher Geschwindigkeit aus, wenn mit x der Werth von ζ sich so ändert, daß

$$\frac{x}{\lambda} . c . \text{Cot.}\ \zeta = c . \text{Cot.}\ \alpha$$

oder $\frac{\lambda}{x} . \text{tg.}\ \zeta = \text{tg.}\ \alpha$

wird, also

$$\text{XVI.}\quad \text{tg.}\ \zeta = \frac{x}{\lambda} . \text{tg.}\ \alpha$$

Dabei ist c die Umlaufsgeschwindigkeit von der Mitte der Sprosse, welche in der Höhe λ in die Ruthe eingesteckt ist.

welches dann der angenommene Satz für windschiefe Flügel ist.

§. 5. In (XVI) ist also α der Neigungswinkel am Ende der ganzen Ruthenlänge λ. Es läßt sich nunmehr das statische Moment eines ganzen Flügels finden, welches wir mit M bezeichnen wollen. Ist Q der auf die Entfernung R reducirte gesammte Widerstand, so hat man für den Beharrungsstand

$$R . Q = \mathfrak{M}; \text{ also } Q = \frac{\mathfrak{M}}{R}$$

Ist E der Effekt, so kann man

$$\text{XVII. } E = \frac{R}{\lambda} . c R Q = \frac{R \mathfrak{M}}{\lambda} . c$$

setzen; und man erhält E(m) oder das Maximum von E, wenn $\frac{R \mathfrak{M}}{\lambda} . c$ ein Maximum wird. Dann findet man aber, daß der Effekt desto größer werden müsse, je größer c, also je größer λ und je kleiner daher auch Q genommen wird. Nach dieser Theorie würde also α unendlich wenig von 90° abweichen und der Winkel ζ für die unterste Sprosse gleichfalls unendlich wenig von 90° verschieden seyn dürfen, und Q würde unendlich klein. Der gebogene Flügel wäre also hiernach von einem ebenen unendlich wenig verschieden, und der Nutzeffekt = 0, oder vielmehr noch verneint.

§. 6. Ein Theil der gleichfalls auf die Entfernung R. reducirten Reibung kann der Nutzlast Q′ proportional angenommen werden; wir wollen ihn durch δ. Q′ ausdrucken; die übrige ebendahin reducirte Reibung sey q, so ist

$$Q = (1 + \delta) . Q' + q$$

und

$$\text{XVIII. } E = \frac{R}{\lambda} . (R . c . (1 + \delta) . Q' + R . c q)$$

oder, wenn E′ den Nutzeffekt bezeichnet,

$$\text{XIX. } E' = \frac{E - \frac{R^2}{\lambda} . c q}{1 + \delta}$$

Um also den größtmöglichen Nutzeffekt zu erhalten, muß c so genommen werden, daß nicht E sondern $E - \frac{R^2}{\lambda} . c q$

ein Maximum werde. Dürfte man q = o setzen, so würde E' zugleich mit E ein Maximum. Da aber q nie verschwindet, so muß immer auf das Maximum von E' (No. XIX gesehen werden. Hiergegen hat Karsten (Lehrbegr. VI. Th. S. 695) durchaus gefehlt, indem er den von Q' ganz unabhängigen Theil der Reibung, hier q, ganz außer Acht gelassen und die Sache so dargestellt hat, wie sie sich nur in dem Falle wirklich verhalten würde, wenn Q = (1 + δ). Q', und hierbei δ eine wenigstens beinahe unveränderliche Größe wäre.

§. 7. Die Resultate der von Karsten vorgetragenen Theorie der gebogenen Flügel sind daher für die Ausübung ganz unnütz. Ich habe aber noch eine andere Erinnerung schon gegen ihre erste Begründung zu machen. Es läßt sich nämlich durchaus nicht absehen, warum die Wendung der Flügel gerade nach (No. XIV.) genommen werden solle?

Damit wird freilich bewirkt, daß der Flügel in allen Entfernungen von der Umlaufsaxe mit gleicher Geschwindigkeit ausweicht, aber wegen der Verschiedenheit des Seitendrucks, die mit der Veränderlichkeit von ζ zusammenhängt, findet dennoch in den verschiedenen Entfernungen kein gleicher Druck zur Umdrehung des Flügels statt. Und was soll hier überhaupt mit einer solchen Gleichstellung bezweckt werden?

Offenbar wird hiermit der Gestalt des Flügels, deren vortheilhafte Einrichtung erst noch gesucht wird, schon ein Gesetz vorgeschrieben, ohne sich darum zu bekümmern, ob es vortheilhaft sey? Wir müssen daher die Sache aus einem ganz andern Gesichtspunkte betrachten.

§. 8. Vor allen Dingen müssen wir nun hierbei den Gegenstand selbst nicht außer Acht lassen, und deßhalb be-

merken, daß einer etwa nach der Differentialrechnung gefundenen Bestimmung von ζ in der Ausübung nicht einmal genau Genüge geschehen könnte. Der Winkel ζ wird nämlich durch die sogenannten Windsprossen bewirkt, welche in die Ruthen eingesteckt werden. Diese Windsprossen stehen, von Mitte zu Mitte, 12 bis 15 Zoll weit von einander, und die verschiedenen Werthe von ζ können also eigentlich nur in diesen Stellen beobachtet werden. Aber auch in diesen Stellen findet nur beiläufige Beobachtung statt 1) weil es nicht thunlich ist, beim Durchlochen der Ruthen die Abänderungen von ζ bis zu 1°, noch weniger bis zu Minuten zu treffen; 2) weil der Wind die Sprossen selbst zurückdruckt und hiermit ζ wieder vermindert wird, welches nach Verschiedenheit des Windes 1 = 2 = 3 Grade betragen kann. Es beruht daher hier alles eigentlich nur auf Näherungsrechnungen.

§. 9. Man denke sich daher den Flügel von der untersten (der Axe am nächsten liegenden) Sprosse aufwärts den Sprossen parallel in Streifen getheilt, von der Länge l und der Breite β, also von der Fläche l. β. Nehmen wir nun x von der Axe an auf der Ruthe bis zur Mitte von der Breite eines solchen Streifens, so erhalten wir, unter c die Geschwindigkeit von der Mitte der in der Entfernung λ eingesteckten Sprosse verstanden, den partiellen Seitendruck eines Streifens für jede Entfernung x

$$\text{XX.} = \frac{\left(C^2 - \frac{\varepsilon^2 + x^2}{\varepsilon^2 + \lambda^2} . c^2 \operatorname{Cot.} \zeta^2\right) . \operatorname{Sin.} \zeta^2 . \operatorname{Cos.} \zeta}{4g} . l . \beta$$

und das mechanische Moment dieses Drucks

$$\text{XXI.}\quad \left(\sqrt{(\varepsilon^2 + x^2)}\right) . \frac{\left(C^2 - \frac{\varepsilon^2 + x^2}{\varepsilon^2 + \lambda^2} . c^2 . \text{Cot. } \zeta^2\right) . \text{Sin. } \zeta^2 . \text{Cos. } \zeta}{4g} . \text{l. } \varepsilon$$

§. 10. Es kommt nun auf den Gebrauch dieses Ausdrucks an. In Bezug auf die Veränderlichkeit von ζ längs der Ruthe erhalten wir für jeden solchen Streifen das größtmögliche mechanische Moment wenn

$$\left(C^2 - \frac{\varepsilon^2 + x^2}{\varepsilon^2 + \lambda^2} . c^2 . \text{Cot. } \zeta^2\right) . \text{Sin. } \zeta^2 . \text{Cos. } \zeta$$

oder

$$C^2 . \text{Cos. } \zeta - \left(C^2 + \frac{c^2 . (\varepsilon^2 + x^2)}{\varepsilon^2 + \lambda^2}\right) . \text{Cos. } \zeta^3 = \text{max.}$$

wird.

Daher

$$C^2 - 3\left(C^2 + \frac{c^2 . (\varepsilon^2 + x^2)}{\varepsilon^2 + \lambda^2}\right) . \text{Cos. } \zeta^2 = 0$$

und

$$\text{XXII.}\left\{\begin{array}{l} \text{Cos. } \zeta = \sqrt{\dfrac{C^2}{3 \cdot \left(C^2 + \dfrac{c^2 . (\varepsilon^2 + x^2)}{\varepsilon^2 + \lambda^2}\right)}} \\ \text{oder auch} \\ \text{Cos. } \zeta = \sqrt{\dfrac{1}{3 \cdot \left(1 + \dfrac{c^2}{C^2}\dfrac{(\varepsilon^2 + x^2)}{(\varepsilon^2 + \lambda^2)}\right)}} \end{array}\right.$$

§. 11. Werden also die Flügel nach No. XXII gewunden, so erhalten solche diejenige Gestalt, bei welcher jedem einzelnen Streifen, für ein bestimmtes Verhältniß $\frac{c}{C}$, das größtmögliche mechanische Moment zukommt, wobei also auch der ganze Flügel mit dem größtmöglichen mechanischen Momente wirkt. Der Umstand, daß $\varepsilon = \frac{x}{2}$ l. Sin. ζ selbst von ζ abhängt, kann hier ganz bei Seite gesetzt werden, weil die möglichen Verschiedenheiten von ε in Bezug auf das Moment des ganzen Flügels für die Ausübung so gut als gar keinen Einfluß haben, wenn wir allgemein $\varepsilon^2 = 6$ setzen, so daß für die Ausübung

$$\text{XXIII. Cos. } \zeta = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot \left(1 + \dfrac{c^2 . (6 + x^2)}{C^2 . (6 + \lambda^2)}\right)}}$$

wird.

§. 12. Für die Ausübung werden wir nun vollkommen befriedigt, wenn wir für die in der Entfernung $x = 32'$ Par. abliegende Stelle die Geschwindigkeit $c = C$ erhalten, und die Flügel dabei diejenige Gestalt haben, die ihnen bei jener Geschwindigkeit das größtmögliche mechanische Moment giebt. Wir setzen also

$$\text{XXIV.} \quad \text{Cos.}\ \zeta = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot \left(1 + \frac{6 + x^2}{1030}\right)}}$$ in Bezug auf x in Par. Fussen.

Wäre die ganze Ruthenlänge auch nicht $= 32'$, sondern $= k$, so bleibt doch diese Formel für die Voraussetzung richtig, daß die Geschwindigkeit von der Mitte der in der Entfernung 32′ von der Axe eingesteckten Sprosse $c = C$ seyn solle. Dann ist sie nämlich am Ende $= \frac{\sqrt{(6^2 + k^2)}}{\sqrt{(6^2 + 32^2)}} C = \sqrt{\frac{(6 + k^2)}{1030}}$, und

$$\text{Cos.}\ \zeta = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot \left(1 + \frac{6 + k^2}{1030} \cdot \frac{6 + x^2}{6 + k^2}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot \left(1 + \frac{6 + x^2}{1030}\right)}}$$

wie in (XXIV.). Es ist also ζ von k unabhängig; und es bleibt das mechanische Moment allgemein für jeden Streifen von der Breite β und Länge l, wenn die Mitte der Breite β an der Ruthe genommen, in der Entfernung x von der Axe abliegt,

$$\text{XXV. } (\sqrt{(6 + x^2)}) \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot \left(1 + \frac{6 + x^2}{1030} \cdot \text{Cos } \zeta^2\right) \cdot \text{Sin. } \zeta^2 \cdot \text{Cos. } \zeta \cdot 1\ \beta.$$

Nur soll β nicht über 1′ betragen.

Diese Formel behält nun auch noch für $x > 32'$ ihre Richtigkeit, indem $c^2 = \frac{6 + k^2}{1030} \cdot C^2$ wird, indem in der Entfernung von $32'$ $c = C$ seyn soll.

Nach (XXIV) ist nun die nachstehende Tafel berechnet, um von $x = 2{,}5'$ bis zu $x = 41{,}5'$ die zugehörigen Werthe von ζ zu erhalten, in der ich aber die gefundenen Werthe von ζ um ein weniges vergrößert habe, und zwar für die größeren Werthe von x etwas weniger als für die kleineren, weil bei den letzteren diese Aenderungen einen geringeren Einfluß auf das Ganze haben als bei den ersteren. Ueberhaupt beträgt aber diese Vergrößerung von ζ nur beiläufig 2°. Ich habe hiermit den Umstand einigermassen berücksichtigen wollen, daß die Sprossen durch den Wind selbst zurückgedruckt werden.

Auch habe ich die Werthe von ζ nur von 20 zu 20 Minuten von einander unterschieden, weil die genaueren Angaben in Minuten für die Ausübung doch ohne Nutzen wären.

Die einzelnen Streifen habe ich zu 1′ breit angenommen, also $\beta = 1'$. So ist die 2te Kolonne der folgenden Tafel entstanden.

Die 3te enthält für die verschiedenen Werthe von x die zugehörigen Werthe

$$\text{XXVI. } A = (\sqrt{(6 + x^2)}) \cdot \left(1 - \frac{6 + x^2}{1030} \cdot \text{Cot. } \zeta^2\right) \cdot \text{Sin. } \zeta \cdot \text{Cos.}^1 \zeta$$

Die 4te enthält die Summen der Zahlen der 3ten Kolonne von oben herab, welche mit ζ bezeichnet sind. Jede zu x gehörige Zahl der IV. Kolonne giebt also mit $n \,.\, 1\beta \,.\, \frac{C^2}{4g}$ multiplicirt, das statische Moment aller n Flügel bis zur Höhe x hinauf, von der Axe angerechnet, so daß dabei die Sprosse in der Entfernung 32′ von der Axe die Geschwindigkeit c = C hat.

I.	II.	III.	IV.
x	ζ	A	S.
2,5	57°. 10′	1,3321	1,3321
3,5	30	1,6210	2,9531
4,5	50	1,9356	4,8887
5,5	58. 10	2,2630	7,1517
6,5	30	2,5943	9,7454
7,5	50	2,9243	12,6697
8,5	50. 10	3,2517	15,9214
9,5	30	3,5759	19,4973
10,5	50	3,8969	23,3942
11,5	60. 10	4,2083	27,6025
12,5	30	4,5132	32,1157
13,5	50	4,8086	36,9243
14,5	61. 10	5,0975	42,0218
15,5	30	5,3767	47,3985
16,5	50	5,6464	53,0449
17,5	62. 10	5,9064	58,9513

I.	II.	III.	IV.
x	ζ	A	S.
18,5	30′	6,1632	65,1145
19,5	50	6,4200	71,5345
20,5	63°. 10	6,6447	78,1792
21,5	30	6,8597	85,0389
22,5	50	7,0748	92,1137
23,5	64. 10	7,2835	99,3972
24,5	30	7,4793	106,8765
25,5	50	7,6719	113,5484
26,5	65. 10	7,8452	121,3936
27,5	30	8,0250	129,4186
28,5	50	8,1887	137,6073
29,5	66. 10	8,3492	145,9565
30,5	30	8,5000	154,4565
31,5	50	8,6413	163,0978
32,5	67. 10	8,7793	171,8771
33,5	30	8,9109	180,7880
34,5	50	9,0361	189,8241
35,5	68. 10	9,1549	198,9790
36,5	30	9,2672	208,2462
37,5	50	9,3764	217,6226
38,5	69. 10	9,4791	227,0017
39,5	30	9,5754	236,5771
40,5	50	9,6717	246,2488
41,5	70. 10	9,7584	256,0072

§. 13. Bezeichnen wir das statische Moment der n Flügel bis zur Höhe x mit M, so erhalten wir auf solche Weise mittelst der Zahlen S der 4ten Kolonne

$$\text{XXVII.}\quad M = S \,.\, n \,.\, l\beta \,.\, \frac{C^2}{4g} \left\{ \begin{array}{l} \text{in Bezug auf} \\ \text{K. Fusse Luft.} \end{array} \right.$$

Dabei ist nun zwar der kleinste Werth von x nur = 2,5′ angenommen worden, da er selten unter 3,5′ beträgt; wenn indessen auch x = 4,5′ für den untersten 1′ breiten Streifen betragen sollte, so machen die zu unterst fehlenden 2′ keinen bemerkbaren Verlust im Ganzen aus. Setzt man das specifische Gewicht der Luft $= \frac{1}{850}$ von der des Wassers, so wird

$$\text{XXVIII.}\quad M = \frac{S \,.\, n \,.\, l\beta \,.}{850} \,.\, \frac{C^2}{4g} = \frac{S \,.\, n \,.\, l\beta \,.\, C^2}{3400 \,.\, g} \left\{ \begin{array}{l} \text{in Bezug auf} \\ \text{Kub. Fusse} \\ \text{Wassers.} \end{array} \right.$$

Dabei ist $\beta = 1'$

Ex. Es sey in Par. Maaß l = 6′, C = 30′, die Ruthenlänge von der Axe bis zum Ende des Flügels = 34′, also x = 33,5′; n = 4, so giebt die Tafel S = 180,7; also

$$M = \frac{180,7 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 900}{3400 \,.\, 15,1} = 76$$

Die gesammte Last, welche in der Entfernung R von der Axe angebracht werden kann, sey Q; so ist

$$R \,.\, Q = 76$$

also

$$Q = \frac{76}{R}$$

Es sey z. B. R = 1,5′; so wird

$$Q = \frac{152}{3} = 50,6 \text{ K. F. W.}$$

Dabei ist die Geschwindigkeit in 32′ Höhe = C = 30′, und es erfolgen in 1 Minute 9 Umgänge (No. XIV.)

Von obiger Last Q = 50,6 K. F. W. wollen wir nur 42 K. F. als Nutzlast in Rechnung bringen, und uns solche an einem Seile an der Flügelwelle $1\frac{1}{2}'$ von der Axe angebracht denken, so wird solche in 1 Minute auf eine Höhe von

$$9 \cdot 3{,}141 \cdot 3' = 84{,}8'$$

erhoben.

Sollte dagegen eine Last Z nur auf die Höhe von 4' in 1 Minute erhoben werden, so müßte

$$4 \cdot Z = 84{,}8 \cdot 42 = 3561{,}6$$

seyn, also

$$Z = 890{,}4 \text{ K. F. W.}$$

Wäre l nur $5\frac{1}{2}'$, überdas $x = 45{,}5'$, so würde nach dem Fortschreiten der letzten Zahlen der 4ten Kolonne das mechanische Moment etwa = 290, also

$$M = \frac{290 \cdot 4 \cdot 5{,}5 \cdot 900}{3400 \cdot 15{,}1} = 111{,}8$$

und

$$Q = \frac{111{,}8}{1{,}5} = 74{,}5 \text{ K. F. W.}^{*)}$$

Behalten wir für die Nutzlast nur 65, so erhalten wir jetzt

$$Z = \frac{65}{42} \cdot 995{,}4 = 1540{,}5 \text{ K. F. W.}$$

d. h. 4 solche Flügel wurden bei 30' Geschwindigkeit des Windes in 1 Minute etwa 1540 K. F. W. 4 Fuß hoch zu erheben vermögend seyn.

Karsten findet (a. a. O. S. 751.) das Produkt aus der Last in die Förderungshöhe für eine Minute

$$= 4032 \text{ K. F. W.}$$

also

$$Z = 1008 \text{ K. F.}$$

Aber er führt diese Berechnung äußerst fehlerhaft.

*) Dieses beträgt nur 3 K. F. mehr als bei den ebenen Flügeln (No. XIII.)

Es sey nämlich der Hals der Flügelwelle im Durchmesser $= \frac{5'}{8}$, und nun die Last in der Entfernung $\frac{5'}{8}$ von der Axe angebracht; diese Last sey = y K. F. W.

In einer Minute hat Karsten 30 Umgänge, es würde also jene Last in 1 Minute $30 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{5'}{4} = 117{,}7'$ hoch aufgewunden; es müßte also

$$117{,}7 \cdot y = 4032$$

oder $y = 34{,}2$ K. F. W.

seyn. Dieser Widerstand dürfte also am Wellenhals in der Entfernung $\frac{5'}{8}$ von der Axe angebracht werden. Aber Karsten hat hierbei auf den Widerstand, den schon die Reibung verursacht, gar keine Rücksicht genommen; wir haben solchen in der Entfernung 1,5′ oder $\frac{12'}{8}$ vorhin zu 9 K. F. W. angenommen, welches in der Entfernung $\frac{5'}{8}$ schon $\frac{12}{5} \cdot 9 = 21{,}6$ K. F. beträgt. Es bleibt also für die Nutzlast statt 34,2 nur noch 12,6 K. F. W. folglich für Z nur noch $\frac{12{,}6}{34{,}2} \cdot 1008 = 371{,}3$ K. F. W.

§. 14. Lulofs giebt (Karsten a. a. O. S. 749.) nach wirklichen Beobachtungen, die er bei diesen Windflügeln angestellt hat, als Erfahrung an, daß solche bei 30′ Geschwindigkeit des Windes in 1 Minute 1500 K. F. Wasser auf eine Höhe von 4′ fördern können. Diese Erfahrung beweißt die Unbrauchbarkeit von Karstens ganzer Berechnung, die nur 371 K. F. W. giebt, ebenso überzeugend, als sie die unsrige, welche 1540 K. F. giebt, bestättigt. Dabei setzt überdas Karsten das specifische Gewicht der Luft $= \frac{1}{800}$, da ich solches nur $= \frac{1}{850}$ gesetzt habe. Wäre Karsten seiner Theorie in der Anwendung auf diese Flügel ganz treu geblieben, so würde Z vollends auf Null gekommen seyn.

§. 15. Bei solchen nach obiger Tafel gewundenen Flügeln hat man also für die Voraussetzung, daß in der Entfernung von 32′ die Umlaufsgeschwindigkeit = der Windgeschwindigkeit C sey, nach (XXVII).

$$\text{XXIX.}\quad R \,.\, Q = \frac{n \,.\, S \,.\, l\beta \,.\, C^2}{3400 \,.\, g}$$

wo, aus obiger Tafel, für S die Zahl aus der 4ten Kolonne genommen wird, die nämlich zu demjenigen Werthe von x gehört, welcher die Länge der Ruthe von der Axe bis zur Mitte des obersten 1′ breiten Streifens ausdruckt. Man hat also

$$\text{XXX.}\quad Q = \frac{n \,.\, S \,.\, l\beta \,.\, C^2}{3400 \,.\, R \,.\, g} \text{ und } N = 0{,}3 \,.\, C.$$

Bei diesem Widerstande ist in 32′ Entfernung die Umlaufsgeschwindigkeit = C, und mit dieser Umlaufsgeschwindigkeit ist zugleich vermöge der beobachteten Werthe von ζ das größtmögliche statische Moment der Flügel verbunden.

§. 16. Allgemein bleibt aber für alle Werthe von c (der Geschwindigkeit in 32′ Entfernung) nach (XXI), wenn die Flügel einmal die angegebene Gestalt erhalten haben, das statische Moment eines einzelnen Streifens in der Entfernung x

$$= (\sqrt{(1^2 + x^2)}) \,.\, \frac{\left(C^2 - \frac{6 + x^2}{1030} \,.\, c^2 \,.\, \text{Cot.}\, \zeta^2\right) \,.\, \text{Sin.}\, \zeta^2 \,\text{Cos.}\, \zeta}{4g} \,.\, l\beta$$

oder

$$= (\sqrt{(6 + x^2)}) \,.\, \frac{C^2}{4g} \,.\, \left(1 - \frac{6 + x^2}{1030} \,.\, \frac{c^2}{C^2} \,.\, \text{Cot.}\, \zeta^2\right) \,.\, \text{Sin.}\, \zeta^2 \,.\, \text{Cos.}\, \zeta \,.\, l\beta$$

Für $\frac{c}{C} = 1$ ist jedes solches einzelne Moment

$$= \frac{C^2}{4g} \cdot 1\beta \cdot A$$ wo A aus obiger Tafel genommen wird.

Ist nun $\mathfrak{X}$ ein solches einzelnes Moment für jeden andern Werth von $\frac{c}{C}$, so hat man

$$\mathfrak{X} = \frac{1 - \frac{6 + x^2}{1030} \cdot \frac{c^2}{C^2} \cdot \text{Cot.}\, \zeta^2}{1 - \frac{6 + x^2}{1030} \cdot \text{Cot.}\, \zeta^2} \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot 1\beta \cdot A = \frac{1030 - (6 + x^2) \cdot \frac{c^2}{C^2} \cdot \text{Cot.}\, \zeta^2}{1030 - (6 + x^2) \cdot \text{Cot.}\, \zeta^2} \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot 1\beta \cdot A$$

Bezeichnet man nun die zu $x = 2,5'$, $x = 3,5'$; $x = 4,5'$; rc. gehörigen Werthe von $(6 + x^2)$. Cot. ζ^2 mit a, a', a'' rc. und die zugehörigen Werthe der einzelnen Momente mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$ rc. so erhält man

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{X}' + \mathfrak{X}'' + \text{rc.} = \left(\frac{1030 - \frac{c^2}{C^2} \cdot a}{1030 - a} A + \frac{1030 - \frac{c^2}{C^2} \cdot a'}{1030 - a} A' + \frac{1030 - \frac{c^2}{C^2} \cdot a''}{1030 - a''} A'' + \text{rc.} \right) \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot 1\beta$$

wo A, A', A'' rc. die zu $x = 2,5$; $x = 3,5$; $x = 4,5$ rc. gehörigen Zahlen der 3ten Kolonne in obiger Tafel sind. Also allgemein das statische Moment für n Flügel =

$$\text{XXXI.} \quad \left[\left(\frac{A}{1030 - a} + \frac{A'}{1030 - a'} + \frac{A''}{1030 - a''} + \text{rc.} \right) \cdot 1030 - \left(\frac{a A}{1030 - a} + \frac{a' A'}{1030 - a'} + \frac{a'' A''}{1030 - a''} + \text{rc.} \right) \cdot \frac{c^2}{C^2} \right] \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot n \cdot 1\beta.$$

Bezeichnen wir die eingeschlossene Differenz mit K . 1030 $- N . \frac{c^2}{C^2}$, so wird hiernach

$$R . Q = \left(1030 . K - N . \frac{c^2}{C^2}\right) . n . \frac{C^2}{4g} . l\beta$$

also

$$\text{XXXII. } Q = \frac{\left(1030 . K - N . \frac{c^2}{C^2}\right) . n . \frac{C^2}{4g} . l\beta}{R}$$

welches derjenige Werth des gesammten Widerstandes ist, bei welchem in der Entfernung 32′ die Umlaufsgeschwindigkeit $= c$ ist.

§. 17. Für die Ausübung thut man wohl, wenn man Q für die in einer Gegend häufig eintretenden Winde z. B. für $C = 20$ regulirt. Dann hätte man aus (XV)

$$\text{XXXIII. } Q = \frac{n . S . l\beta}{8,5 . R . g}$$

Kann man nun bei stärkeren Winden Q nach Willkühr vergrössern, so kann man immer $c = C$ erhalten. Muß man aber den einmal regulirten Widerstand beibehalten, so wird bei stärkeren Winden nothwendig $c > C$ werden, und die Gleichung (XXXII) gäbe für den festgesetzten Widerstand Q

$$\text{XXXIV. } c = C . \surd\left(1030 . K - \frac{4 R Q g}{n C^2 l\beta}\right).$$

Eben diese Formel behält ihre Anwendbarkeit, es mag C grösser oder kleiner werden, als diejenige Geschwindigkeit, für welche der Widerstand Q regulirt ist. Auch hätte man jetzt die Anzahl von Umläufen in 1 Minute.

$$\text{XXXV. } N = 0,3 . c$$

Verbesserungen.

S. 59. Z. 9 st. Zwischenstecken l. Zwischenstrecken.
— 47. Z. 4 u. 8 st. nur l. nun
— ib. in No. LXIV und LXV. st. $\frac{w^2 + s^2}{\gamma^2 s^2} - 1$ setze man:

$$\frac{1}{\gamma^2} + \frac{w^2}{\gamma^2 s^2} \text{ oder } 1,638 + \frac{w^2}{\gamma^2 s^2}$$

In No. LXVI ist aber keine Korrektion nöthig.
— 256. statt der unrichtigen Seitenzahl 156 l. 256.

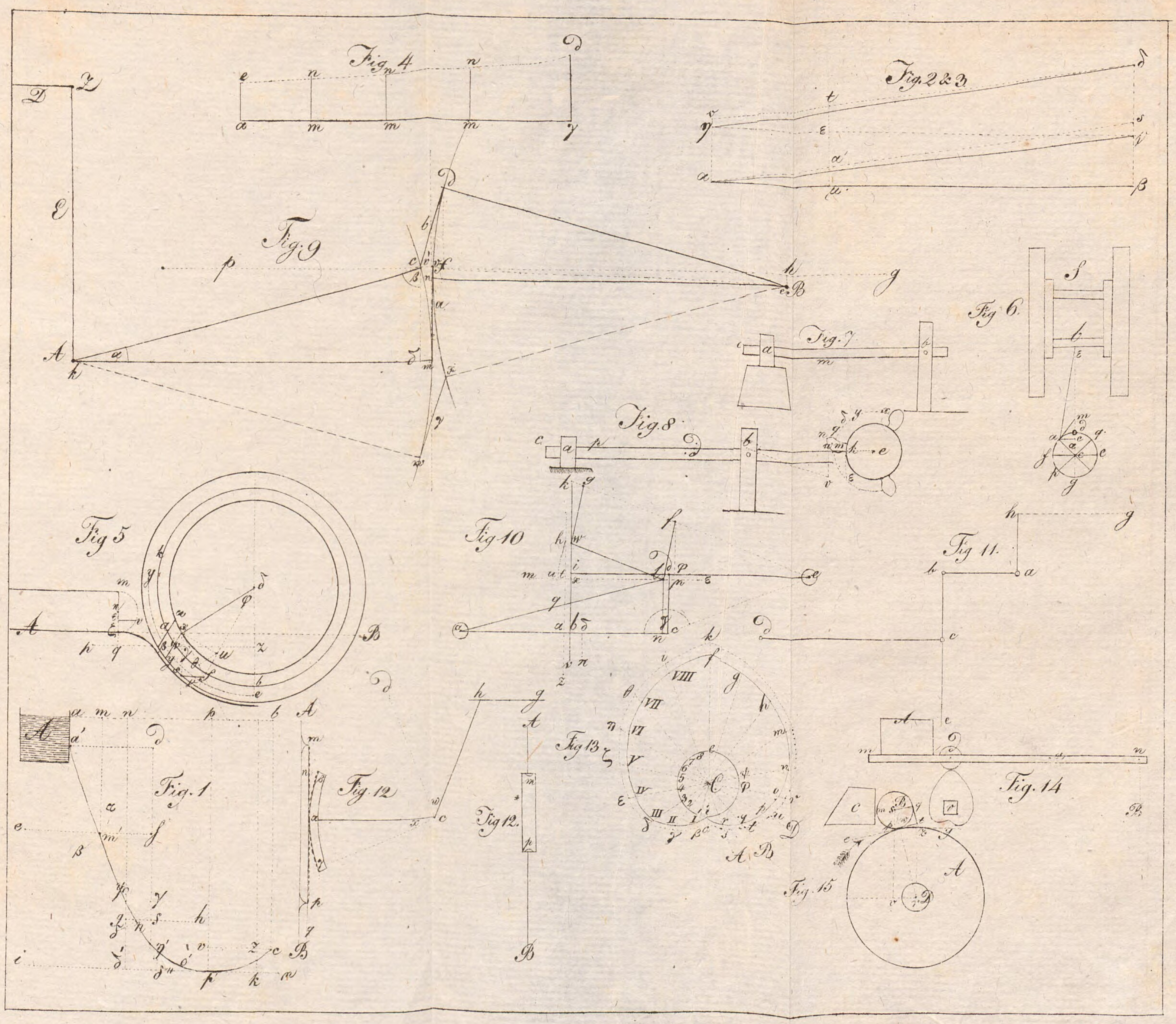


Fig. 1
Fig. 2 & 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15

1 [illegible]

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Langsdorf, Karl Christian <<von>>,

Neuere Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften besonders zur Vervollkommnung der Maschinenlehre mit Anwendungen auf Getraidemühlen, Sägemühlen, Stampfmühlen, Hammerwerke, Röhrenleitungen, Kanäle etc

Mannheim [u.a.] 1816

Math.a. 150 x
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080882-2